Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: aplicaciones e interpretación
Nivel superior
Prueba 3

Martes 9 de noviembre de 2021 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8821 – 7223

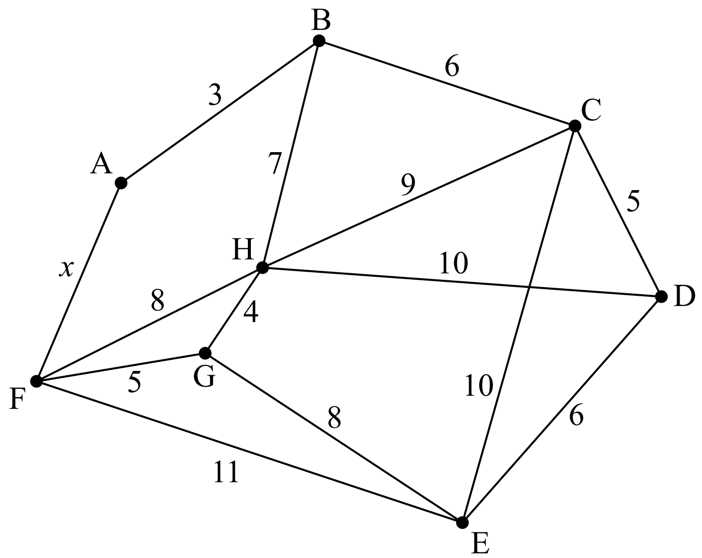
International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 25]

En esta pregunta se explora cómo aplicar los algoritmos de grafos a un grafo donde se desconoce el peso de una de las aristas.

En la siguiente figura se muestra el grafo W. Los vértices de W representan los lugares turísticos que hay en una ciudad. El peso de cada arista representa el tiempo de viaje (redondeando al minuto más próximo) entre dos lugares turísticos. En la actualidad, la ruta entre A y F se está asfaltando de nuevo, lo que hace que el tiempo de viaje sea variable. Por este motivo, AF presenta un tiempo de viaje desconocido de x minutos, donde $x \in \mathbb{Z}^+$.



(a) Escriba un ciclo hamiltoniano que haya en W. [1]

Daniel tiene previsto visitar todos los lugares turísticos, empezando y acabando en A, y quiere minimizar el tiempo de viaje.

A fin de hallar un límite inferior para el tiempo de viaje de Daniel, primero se borran el vértice A y sus aristas adyacentes.

(b) (i) Utilice el algoritmo de Prim, empezando en el vértice B, para hallar el peso del árbol generador minimal del grafo resultante. Debe indicar claramente el orden en el que el algoritmo va escogiendo cada arista. [5]

(ii) A partir de lo anterior, para el caso en el que $x < 9$, halle un límite inferior (en función de x) para el tiempo de viaje de Daniel. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Daniel elabora una tabla para mostrar el mínimo tiempo de viaje entre cada par de lugares turísticos.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
A		3	9	14	19 **o bien** $(11+x)$	18 **o bien** x	14 **o bien** $(5+x)$	10 **o bien** $(8+x)$
B			6	11	16 **o bien** $(14+x)$	15 **o bien** $(3+x)$	11 **o bien** $(8+x)$	7
C				5	10	17 **o bien** $(9+x)$	p	9
D					6	q **o bien** $(r+x)$	14	10
E						11	8	12
F							5	8
G								4
H								

(c) Escriba el valor de:

(i) p [1]

(ii) q [1]

(iii) r [1]

A fin de hallar un límite superior para el tiempo de viaje de Daniel, se utiliza el algoritmo del vecino más cercano, empezando en el vértice A.

(d) Considere el caso en el que $x = 3$.

(i) Utilice el algoritmo del vecino más cercano para hallar dos posibles ciclos. [3]

(ii) Halle el mejor límite superior para el tiempo de viaje de Daniel. [2]

(e) Considere el caso en el que $x > 3$.

(i) Halle el menor valor de x para el cual se puede asegurar que Daniel no utilizará la arista AF. [2]

(ii) A partir de lo anterior, indique el valor del límite superior para el tiempo de viaje de Daniel correspondiente al valor de x que halló en el subapartado (e)(i). [2]

La Oficina de Turismo de la ciudad ha recibido quejas por la falta de limpieza de algunas de las rutas que unen esos lugares turísticos. Corinne, la directora de la oficina, decide inspeccionar todas las rutas entre los distintos lugares turísticos, empezando y acabando en H. La suma de los pesos de todas las aristas del grafo W es $(92 + x)$.

Corinne inspecciona todas las rutas lo más rápido posible y tarda 2 horas.

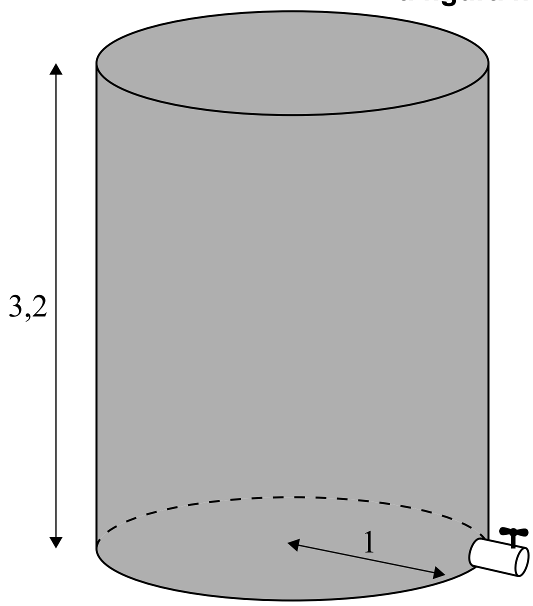
(f) Halle el valor que tuvo x durante la inspección de Corinne. [5]

2. [Puntuación máxima: 30]

En esta pregunta se exploran diferentes modelos para representar la altura del agua en un contenedor cilíndrico a medida que va saliendo el agua.

La figura muestra un contenedor de agua cilíndrico de $3{,}2$ metros de altura y con una base de 1 metro de radio. En la base del contenedor hay una pequeña válvula circular que permite que salga el agua.

la figura no está dibujada a escala



Eva cierra la válvula y llena el contenedor de agua.

En el instante $t = 0$, Eva abre la válvula. Cada 5 minutos va anotando la altura (h metros) del agua que queda en el contenedor.

Tiempo (t minutos)	Altura (h metros)
0	3,2
5	2,4
10	1,6
15	1,1
20	0,5

Eva primero trata de modelizar la altura utilizando una función lineal $h(t) = at + b$, donde a, $b \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Halle la ecuación de la recta de regresión de h sobre t. [2]

(ii) Interprete el significado del parámetro a en el contexto de este modelo. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Eva utiliza la ecuación de la recta de regresión de h sobre t para predecir el tiempo que tardará en salir toda el agua del contenedor.

(iii) Sugiera por qué podría resultar poco fiable utilizar la ecuación de regresión lineal del modo en que lo ha hecho Eva. [1]

Eva cree que puede mejorar su modelo utilizando una función cuadrática $h(t) = pt^2 + qt + r$, donde p, q, $r \in \mathbb{R}$.

(b) (i) Halle la ecuación de la curva de regresión cuadrática de mínimos cuadrados. [1]

Eva utiliza esta ecuación para predecir el tiempo que tardará en salir toda el agua del contenedor y obtiene un resultado de k minutos.

(ii) Halle el valor de k. [2]

(iii) A partir de lo anterior, escriba un dominio apropiado para la función $h(t) = pt^2 + qt + r$ de Eva. [1]

Sea V el volumen de agua (en metros cúbicos) que hay en el contenedor en el instante t minutos. Sea R el radio (en metros) de la válvula circular.

Eva investiga un poco y descubre una fórmula para la razón de cambio de V.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2 \sqrt{70\,560\,h}$$

(c) Muestre que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -R^2 \sqrt{70\,560\,h}$. [3]

(d) Resolviendo la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -R^2 \sqrt{70\,560\,h}$, muestre que la solución general viene dada por $h = 17\,640\left(c - R^2 t\right)^2$, donde $c \in \mathbb{R}$. [5]

Eva mide el radio de la válvula y obtiene un valor de $0{,}023$ metros. Sea T el tiempo (en minutos) que tarda en salir toda el agua del contenedor.

(e) Utilice la solución general del apartado (d) y la condición inicial $h(0) = 3{,}2$ para predecir el valor de T. [4]

Eva quiere utilizar el contenedor a modo de cronómetro. Para ello, ajusta la altura inicial del agua del contenedor de modo tal que toda el agua tarde 15 minutos en salir del contenedor.

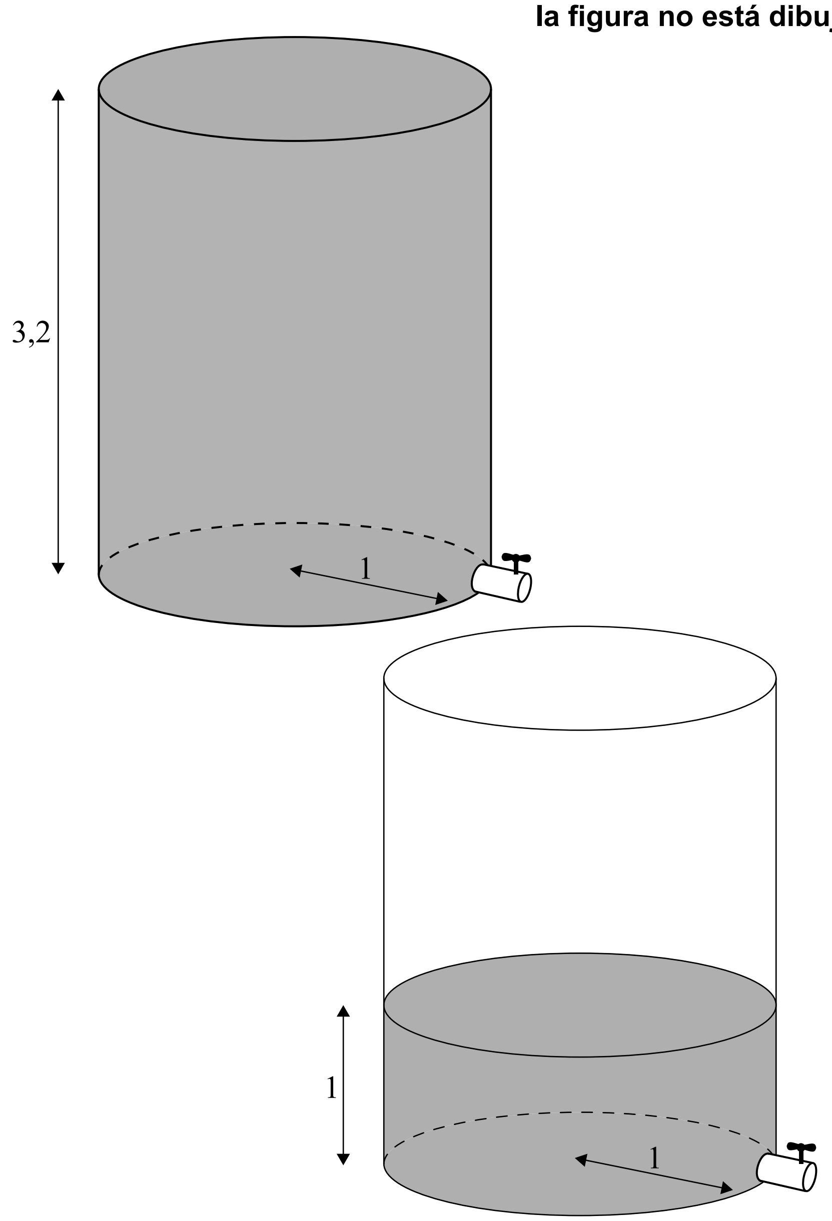
(f) Halle esta nueva altura. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Eva tiene otro contenedor de agua que es idéntico al primero. Coloca un contenedor de agua encima del otro, de modo que toda el agua que salga del contenedor de arriba caiga en el contenedor de abajo. Eva llena completamente el contenedor de arriba, pero el de abajo solo lo llena hasta una altura de 1 metro, tal y como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



En el instante $t = 0$, Eva abre las dos válvulas. Sea H la altura del agua (en metros) que hay en el contenedor de abajo en el instante t.

(g) (i) Muestre que $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \approx 0{,}2514 - 0{,}009873t - 0{,}1405\sqrt{H}$, donde $0 \le t \le T$. [4]

(ii) Utilice el método de Euler con un paso de $0{,}5$ minutos para estimar el valor máximo de H. [3]

Fuentes: