Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

Mathématiques : applications et interprétation
Niveau supérieur
Épreuve 3

Mardi 9 novembre 2021 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

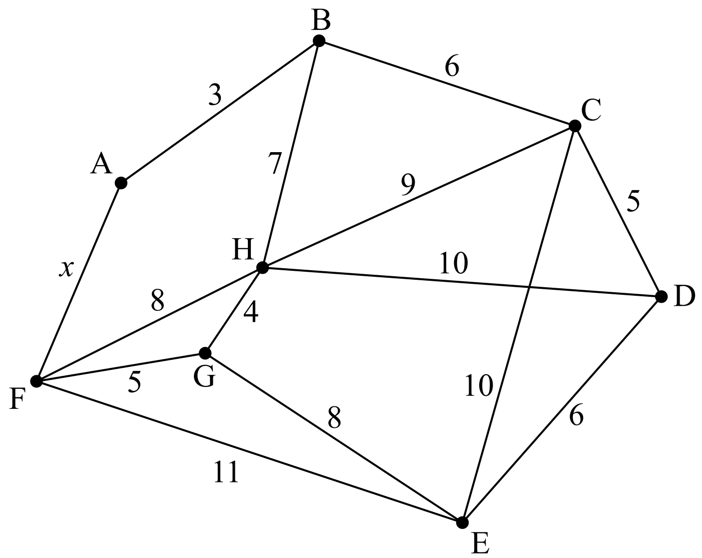
8821 – 7218
© International Baccalaureate Organization 2021

Répondez aux **deux** questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 25]

Cette question explore comment les algorithmes de la théorie des graphes peuvent être appliqués à un graphe dont le poids d'une arête est inconnu.

Le graphe W est montré dans le diagramme suivant. Les sommets de W représentent les attractions touristiques dans une ville. Le poids de chaque arête représente le temps de déplacement, à la minute près, entre deux attractions. La route entre A et F est actuellement en réfection et cela fait en sorte que le temps de déplacement est variable. Pour cette raison, AF a un temps de déplacement inconnu de x minutes, où $x \in \mathbb{Z}^+$.



(a) Écrivez un cycle hamiltonien dans W. [1]

Daniel prévoit de visiter toutes les attractions, en commençant et en terminant en A. Il veut minimiser son temps de déplacement.

Pour trouver une borne inférieure pour le temps de déplacement de Daniel, le sommet A et ses arêtes adjacentes sont d'abord supprimés.

(b) (i) Utilisez l'algorithme de Prim, en partant du sommet B, pour trouver le poids de l'arbre couvrant minimal du reste du graphe. Vous devez indiquer clairement l'ordre dans lequel l'algorithme choisit chaque arête. [5]

(ii) À partir de là, pour le cas où $x < 9$, trouvez une borne inférieure pour le temps de déplacement de Daniel, en fonction de x. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Daniel fait un tableau pour montrer le temps de déplacement minimum entre chaque paire d'attractions.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		3	9	14	19 **ou** $(11+x)$	18 **ou** x	14 **ou** $(5+x)$	10 **ou** $(8+x)$
B			6	11	16 **ou** $(14+x)$	15 **ou** $(3+x)$	11 **ou** $(8+x)$	7
C				5	10	17 **ou** $(9+x)$	p	9
D					6	q **ou** $(r+x)$	14	10
E						11	8	12
F							5	8
G								4
H								

(c) Écrivez la valeur de

(i) p ; [1]

(ii) q ; [1]

(iii) r . [1]

Pour trouver une borne supérieure pour le temps de déplacement de Daniel, l'algorithme du plus proche voisin est utilisé, en partant du sommet A.

(d) Considérez le cas où $x = 3$.

(i) Utilisez l'algorithme du plus proche voisin pour trouver deux cycles possibles. [3]

(ii) Trouvez la meilleure borne supérieure pour le temps de déplacement de Daniel. [2]

(e) Considérez le cas où $x > 3$.

(i) Trouvez la plus petite valeur de x pour laquelle il est certain que l'arête AF ne sera pas utilisée par Daniel. [2]

(ii) À partir de là, indiquez la valeur de la borne supérieure pour le temps de déplacement de Daniel correspondant à la valeur de x trouvée dans la partie (e)(i). [2]

L'office de tourisme de la ville a reçu des plaintes concernant le manque de propreté de certaines routes entre les attractions. Corinne, la responsable de l'office de tourisme, décide d'inspecter toutes les routes entre toutes les attractions, en commençant et en terminant en H. La somme des poids de toutes les arêtes du graphe W est $(92+x)$.

Corinne inspecte toutes les routes aussi vite que possible et cela lui prend 2 heures.

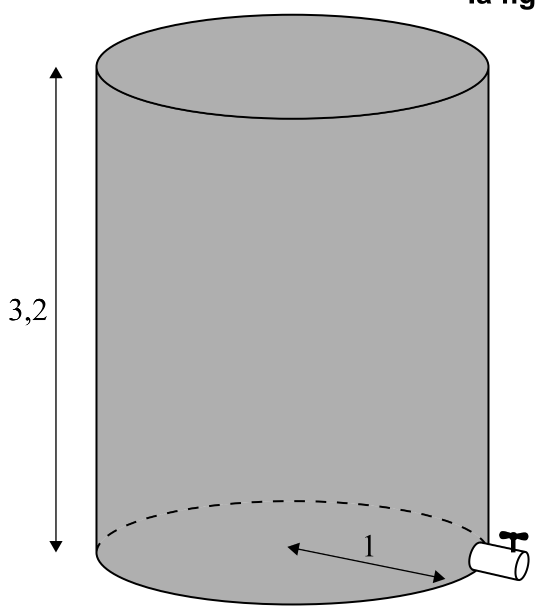
(f) Trouvez la valeur de x au cours de l'inspection de Corinne. [5]

2. [Note maximale : 30]

Cette question explore des modèles pour la hauteur de l’eau dans un réservoir cylindrique lorsque l’eau s’écoule.

Le diagramme montre un réservoir d’eau cylindrique d’une hauteur de $3,2$ mètres et dont le rayon de la base mesure 1 mètre. À la base du réservoir se trouve une petite valve circulaire qui permet à l’eau de s’écouler.

la figure n’est pas à l’échelle



Eva ferme la valve et remplit le réservoir d’eau.

Au temps $t = 0$, Eva ouvre la valve. Elle enregistre la hauteur, h mètres, de l’eau restant dans le réservoir toutes les 5 minutes.

Temps, t (minutes)	**Hauteur, h (mètres)**
0	3,2
5	2,4
10	1,6
15	1,1
20	0,5

Eva tente d’abord de modéliser la hauteur à l’aide d’une fonction linéaire, $h(t) = at + b$, où a, $b \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Trouvez l’équation de la droite de régression pour h en fonction de t. [2]

(ii) Interprétez le sens du paramètre a dans le contexte du modèle. [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Eva utilise l'équation de la droite de régression pour h en fonction de t pour prédire le temps que cela prendra à toute l'eau pour s'écouler du réservoir.

(iii) Suggérez pourquoi l'utilisation par Eva de l'équation de régression linéaire de cette manière pourrait ne pas être fiable. [1]

Eva croit qu'elle peut améliorer son modèle en utilisant une fonction quadratique, $h(t) = pt^2 + qt + r$, où p, q, $r \in \mathbb{R}$.

(b) (i) Trouvez l'équation de la courbe de régression quadratique des moindres carrés. [1]

Eva utilise cette équation pour prédire le temps que cela prendra à toute l'eau pour s'écouler du réservoir et obtient une réponse de k minutes.

(ii) Trouvez la valeur de k. [2]

(iii) À partir de là, écrivez un domaine approprié pour la fonction d'Eva, à savoir $h(t) = pt^2 + qt + r$. [1]

Soit V le volume, en mètres cubes, d'eau dans le réservoir au temps t minutes.
Soit R le rayon, en mètres, de la valve circulaire.

Eva fait quelques recherches et découvre une formule pour le taux de variation de V.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2 \sqrt{70\,560\,h}$$

(c) Montrez que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -R^2 \sqrt{70\,560\,h}$. [3]

(d) En résolvant l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -R^2 \sqrt{70\,560\,h}$, montrez que la solution générale est donée par $h = 17\,640\,(c - R^2 t)^2$, où $c \in \mathbb{R}$. [5]

Eva mesure le rayon de la valve comme étant de $0{,}023$ mètre. Soit T le temps, en minutes, que cela prend pour toute l'eau s'écoule du réservoir.

(e) Utilisez la solution générale de la partie (d) et la condition initiale $h(0) = 3{,}2$ pour prédire la valeur de T. [4]

Eva veut utiliser le réservoir comme minuterie. Elle ajuste la hauteur initiale de l'eau dans le réservoir pour que toute l'eau s'écoule hors de ce dernier en 15 minutes.

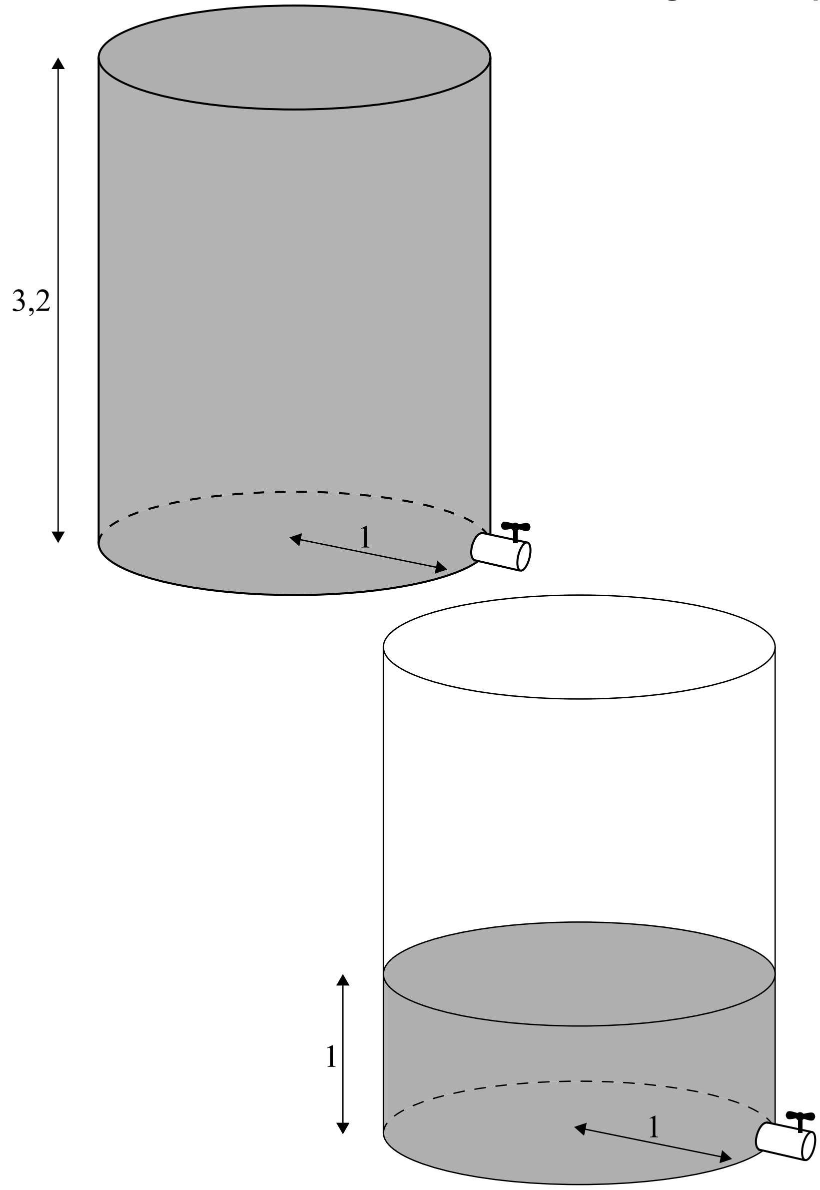
(f) Trouvez cette nouvelle hauteur. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Eva a un autre réservoir d'eau identique au premier. Elle place un des réservoirs au-dessus de l'autre, de sorte que toute l'eau du réservoir du haut s'écoule dans le réservoir du bas. Eva remplit complètement le réservoir du haut, mais ne remplit qu'à une hauteur de 1 mètre le réservoir du bas, comme indiqué dans le diagramme.

la figure n'est pas à l'échelle



Au temps $t = 0$, Eva ouvre les deux valves. Soit H la hauteur de l'eau, en mètres, dans le réservoir du bas au temps t.

(g) (i) Montrez que $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \approx 0{,}2514 - 0{,}009873t - 0{,}1405\sqrt{H}$, où $0 \le t \le T$. [4]

(ii) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de longueur $0{,}5$ minute pour estimer la valeur maximale de H. [3]

Références :

© Organisation du Baccalauréat International 2021