Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : applications et interprétation
Niveau moyen
Épreuve 2

Mardi 2 novembre 2021 (matin)

1 heure 30 minutes

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[80 points]**.

8821 – 7220

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n’a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l’aide d’une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d’un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 16]

On a demandé à un groupe de 1280 élèves quel était leur appareil électronique préféré. Les résultats par groupe d’âge sont présentés dans le tableau suivant.

	Âge			
Appareil préféré	**11–13**	**14–16**	**17–18**	**Total**
Ordinateur portable	143	160	153	456
Tablette	205	224	131	560
Téléphone portable	72	128	64	264
Total	420	512	348	1280

(a) Un élève du groupe est choisi au hasard. Calculez la probabilité que l’élève

(i) préfère une tablette.

(ii) soit dans le groupe des $11–13$ ans et préfère un téléphone portable.

(iii) préfère un ordinateur portable **étant donné qu’**il est dans le groupe des $17–18$ ans.

(iv) préfère une tablette ou soit dans le groupe des $14–16$ ans. [9]

Un test d’indépendance du χ^2 a été effectué sur les données recueillies au niveau de signification de 1%. La valeur critique pour le test est $13,277$.

(b) Indiquez l’hypothèse nulle et l’hypothèse alternative. [1]

(c) Écrivez le nombre de degrés de liberté. [1]

(d) (i) Écrivez la statistique du test du χ^2.

(ii) Écrivez la valeur p.

(iii) Indiquez la conclusion du test dans le contexte de la question. Donnez une raison pour votre réponse. [5]

2. [Note maximale : 16]

L'équipe des admissions d'une nouvelle université tente de prédire le nombre de candidatures d'étudiants qu'elle recevra chaque année.

Soit n le nombre d'années depuis l'ouverture de l'université. L'équipe des admissions collecte les données suivantes pour les deux premières années.

Année, n	**Nombre de candidatures reçues durant l'année n**
1	$12\,300$
2	$12\,669$

(a) Calculez le pourcentage d'augmentation du nombre de candidatures entre la première et la deuxième année. [2]

On suppose que le nombre d'étudiants qui postulent à l'université chaque année suivra une suite géométrique, u_n.

(b) (i) Écrivez la raison de la suite.

(ii) Trouvez une expression pour u_n.

(iii) Trouvez le nombre de candidatures que l'université espère recevoir lorsque $n = 11$. Exprimez votre réponse à l'entier le plus près. [4]

La première année, il y avait $10\,380$ places disponibles à l'université. L'équipe des admissions annonce que le nombre de places disponibles augmentera chaque année de 600.

Soit v_n le nombre de places disponibles à l'université l'année n.

(c) Écrivez une expression pour v_n. [2]

Pour les 10 premières années depuis l'ouverture de l'université, toutes les places sont remplies. Les étudiants qui obtiennent une place paient chacun des frais d'acceptation se montant à $80\ \$$.

(d) Calculez le montant total des frais d'acceptation payés à l'université au cours des 10 premières années. [3]

Lorsque $n = k$, le nombre de places disponibles dépassera, pour la première fois, le nombre de candidatures.

(e) Trouvez k. [3]

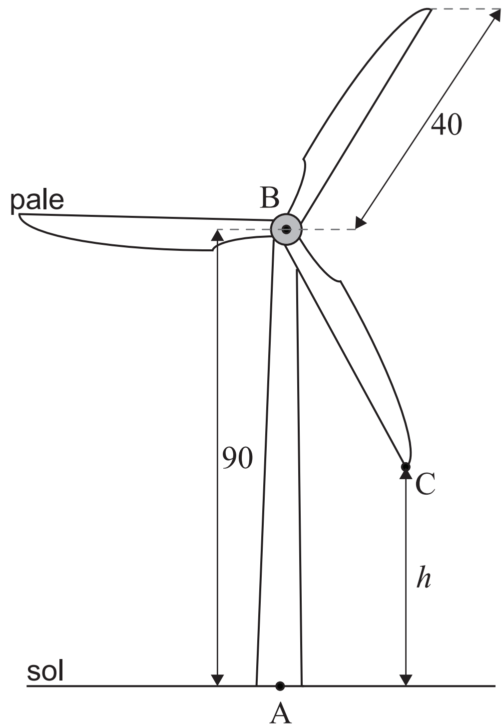
(f) Indiquez si, pour tout $n > k$, l'université aura des places disponibles pour tous les candidats. Justifiez votre réponse. [2]

3. [Note maximale : 20]

Une éolienne est conçue pour que la rotation des pales génère de l’électricité. L’éolienne est construite sur un sol horizontal et se compose d’une tour verticale et de trois pales.

Le point A est à la base de la tour, directement en dessous du point B qui est situé au sommet de la tour. La hauteur de la tour, AB, est de $90\,\text{m}$. Les pales de l’éolienne sont centrées en B et chacune d’entre elles a une longueur de $40\,\text{m}$. Ceci est montré dans le diagramme suivant.

la figure n’est pas à l’échelle



Le bout d’une des pales de l’éolienne est représenté par le point C sur le diagramme. Soit h la hauteur de C au-dessus du sol, mesurée en mètres, où h varie lorsque la pale tourne.

(a) Trouvez

(i) la valeur maximale de h.

(ii) la valeur minimale de h. [2]

Les pales de l’éolienne effectuent 12 tours complets par minute dans des conditions normales, se déplaçant à une vitesse constante.

(b) (i) Trouvez le temps, en secondes, que prend la pale $[\text{BC}]$ pour effectuer un tour complet dans ces conditions.

(ii) Calculez l’angle, en degrés, décrit par la pale $[\text{BC}]$ en une seconde. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 3)

La hauteur, h, du point C peut être modélisée par la fonction suivante. Le temps, t, est mesuré à partir de l'instant où la pale [BC] passe pour la première fois par [AB] et il est mesuré en secondes.

$$h(t) = 90 - 40\cos(72t^{\circ}),\ t \geq 0$$

(c) (i) Écrivez l'amplitude de la fonction.

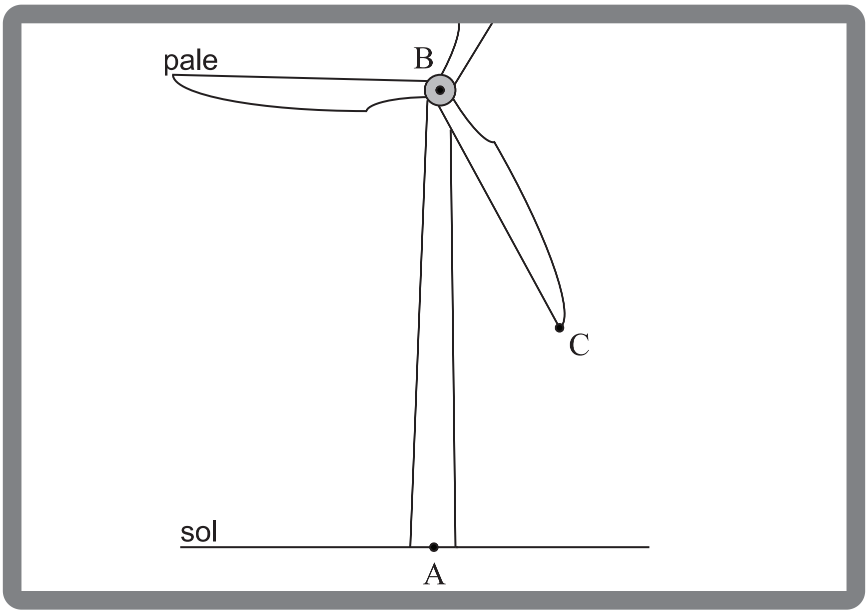
(ii) Trouvez la période de la fonction. [2]

(d) Esquissez la fonction $h(t)$ pour $0 \leq t \leq 5$, en légendant clairement les coordonnées des points maximum et minimum. [3]

(e) (i) Trouvez la hauteur de C au-dessus du sol lorsque $t = 2$.

(ii) Trouvez le temps, en secondes, durant lequel le point C est au-dessus d'une hauteur de $100\,\text{m}$, pendant chaque tour complet. [5]

En regardant par sa fenêtre, Tim a une vue partielle de l'éolienne en rotation. La position de sa fenêtre fait en sorte qu'il ne peut voir aucune partie de l'éolienne qui se trouve **à plus de 100 m** au-dessus du sol. Ceci est illustré dans le diagramme suivant.



(f) (i) À tout instant donné, trouvez la probabilité que le point C soit visible depuis la fenêtre de Tim.

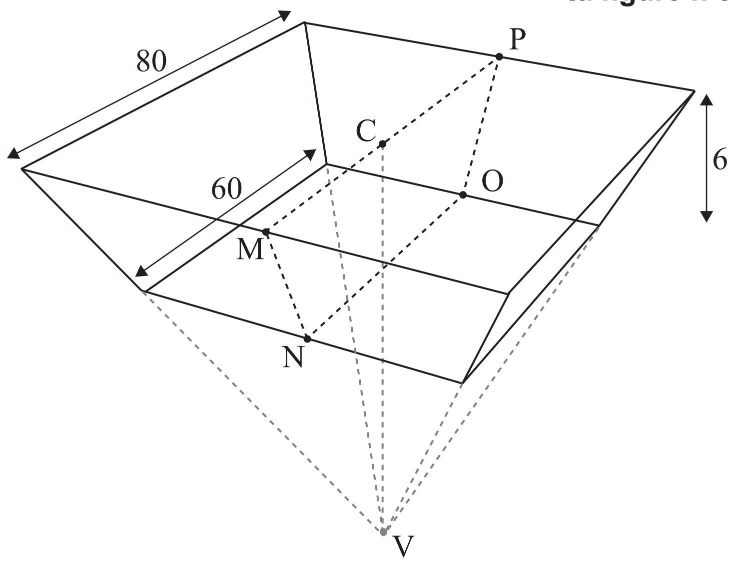
La vitesse du vent augmente. Les pales tournent deux fois plus vite, mais toujours à une vitesse constante.

(ii) À tout instant donné, trouvez la probabilité que Tim puisse voir le point C depuis sa fenêtre. Justifiez votre réponse. [5]

4. [Note maximale : 14]

Un grand réservoir d'eau est construit sous la forme d'une partie d'une pyramide droite à l'envers avec une base carrée horizontale dont le côté mesure 80 mètres de longueur. Le point C est le centre de la base carrée et le point V est le sommet de la pyramide.

la figure n'est pas à l'échelle



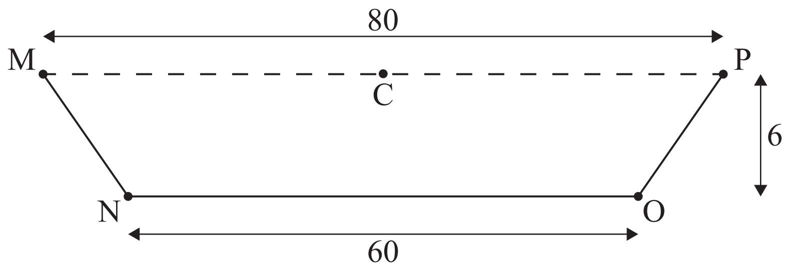
Le fond du réservoir est un carré dont le côté mesure 60 mètres de longueur et qui est parallèle à la base de la pyramide, de sorte que la profondeur du réservoir est de 6 mètres, tel qu'indiqué dans le diagramme.

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

Le deuxième diagramme montre une coupe verticale, MNOPC, du réservoir.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez l'angle de dépression de M à N. [2]

(b) (i) Trouvez CV.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, montrez que le volume du réservoir est de $29\,600\,\text{m}^3$. [5]

Chaque jour, $80\,\text{m}^3$ d'eau provenant du réservoir sont utilisés pour l'irrigation.

Joshua affirme que, s'il n'y a pas d'autre eau qui entre ou qui sort du réservoir, alors lorsque ce dernier est plein, il y a suffisamment d'eau pour l'irrigation pendant au moins un an.

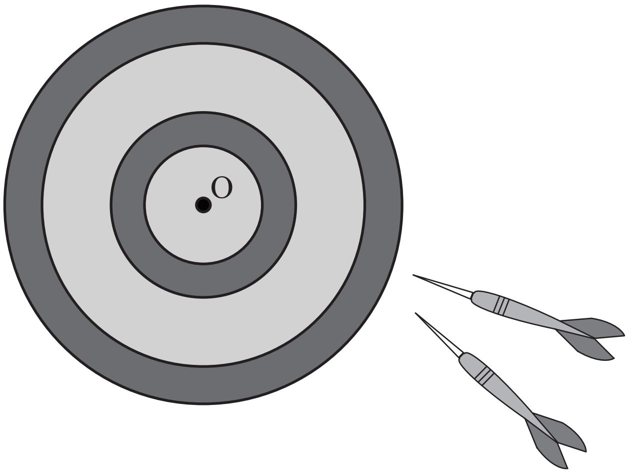
(c) En trouvant une valeur appropriée, déterminez si l'affirmation de Joshua est correcte. [2]

Pour éviter que l'eau ne s'écoule dans le sol, les cinq côtés intérieurs du réservoir ont été peints avec un matériau étanche.

(d) Trouvez l'aire qui a été peinte. [5]

5. [Note maximale : 14]

Arianne joue aux fléchettes.



La distance à laquelle ses fléchettes atterrissent par rapport au centre, O, de la cible peut être modélisée par une distribution normale avec une moyenne de $10\,\mathrm{cm}$ et un écart type de $3\,\mathrm{cm}$.

(a) Trouvez la probabilité

(i) qu’une fléchette atterrisse à moins de $13\,\mathrm{cm}$ de O.

(ii) qu’une fléchette atterrisse à plus de $15\,\mathrm{cm}$ de O. [3]

Chacun des lancers d’Arianne est indépendant de ses lancers précédents.

(b) Trouvez la probabilité qu’Arianne lance deux fléchettes consécutives qui atterrissent à plus de $15\,\mathrm{cm}$ de O. [2]

Dans une compétition, un joueur doit lancer trois fléchettes lors de son tour. Un point est marqué si **les trois** fléchettes lancées par le joueur atterrissent dans une zone centrale autour de O. Lorsqu’Arianne lance une fléchette, la probabilité qu’elle atterrisse dans cette zone est de $0{,}8143$.

(c) Trouvez la probabilité qu’Arianne ne marque **pas** de point lors de son tour avec trois fléchettes. [2]

Lors de la compétition, Arianne a dix tours, chacun avec trois fléchettes.

(d) (i) Trouvez la probabilité qu’Arianne marque au moins 5 points dans la compétition.

(ii) Trouvez la probabilité qu’Arianne marque au moins 5 points et moins de 8 points.

(iii) Étant donné qu’Arianne marque au moins 5 points, trouvez la probabilité qu’Arianne marque moins de 8 points. [7]

Références :