

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

## Matemáticas: aplicaciones e interpretación

### Nivel superior

### Prueba 2

Martes 2 de noviembre de 2021 (mañana)

2 horas

---

#### Instrucciones para los alumnos

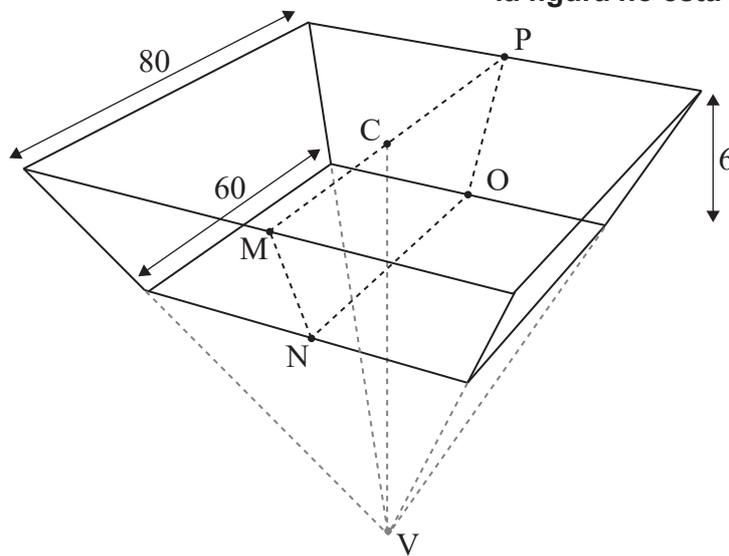
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 14]

Un depósito de agua de gran tamaño tiene la forma de un trozo de pirámide recta invertida, cuya base cuadrada horizontal mide 80 metros de lado. El punto C es el centro de la base cuadrada y el punto V es el vértice de la pirámide.

la figura no está dibujada a escala



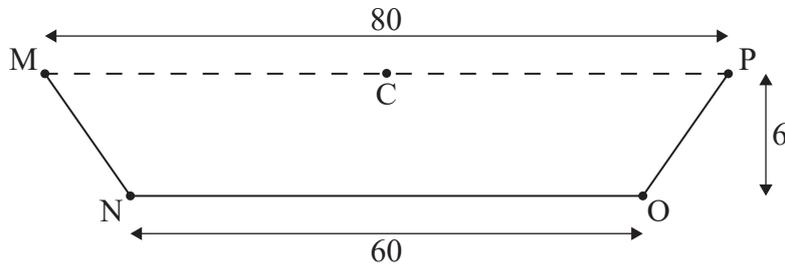
La parte inferior del depósito es un cuadrado de 60 metros de lado que es paralelo a la base de la pirámide, de modo que la profundidad del depósito es igual a 6 metros, como se muestra en la figura.

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

La segunda figura muestra una sección transversal vertical (MNOPC) del depósito.

**la figura no está dibujada a escala**



(a) Halle el ángulo de depresión desde M hasta N. [2]

(b) (i) Halle CV.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que el volumen del depósito es igual a  $29\,600\text{ m}^3$ . [5]

Cada día se utilizan  $80\text{ m}^3$  de agua del depósito para regar.

Joshua afirma que, si no hay más agua que entre al depósito o que salga de él, cuando el depósito está lleno hay suficiente agua para regar durante al menos un año.

(c) Hallando un valor que resulte apropiado, determine si Joshua tiene razón. [2]

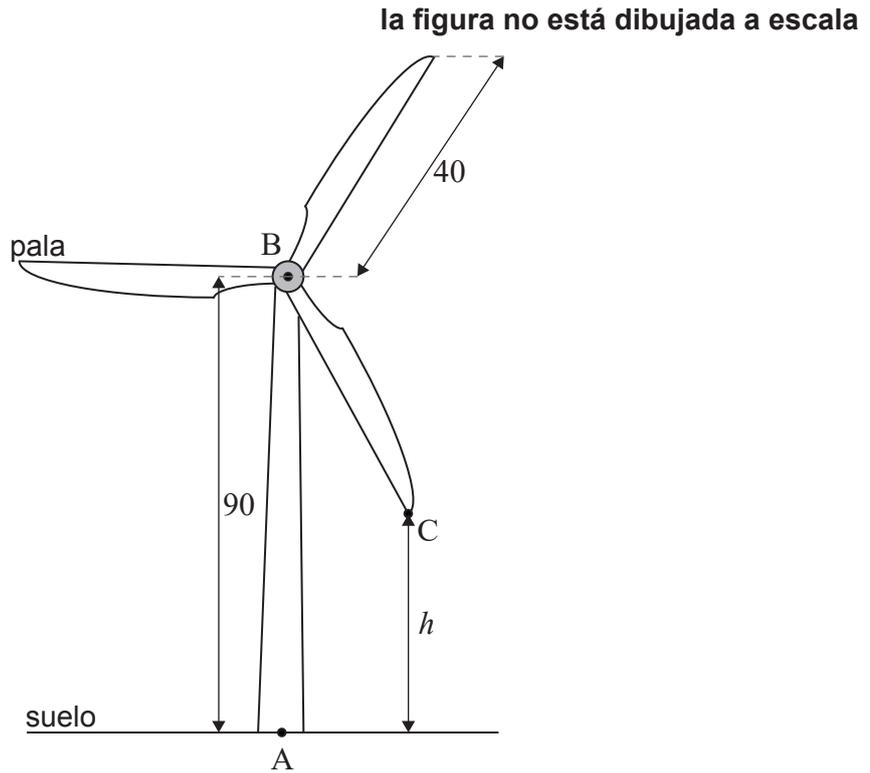
Para evitar que haya fugas de agua, se han pintado las cinco caras interiores del depósito con un material impermeable.

(d) Halle el área que se ha pintado. [5]

2. [Puntuación máxima: 20]

Una turbina eólica se ha diseñado de modo que genere energía eléctrica con la rotación de las palas. La turbina está instalada en un terreno horizontal y está compuesta por una torre vertical y tres palas.

El punto A se encuentra en la base de la torre y justo debajo del punto B, que está en la parte superior de la torre. La altura de la torre (AB) es igual a 90 m. Las palas de la turbina coinciden en B y cada una de ellas tiene una longitud de 40 m. Toda esta información se representa en la siguiente figura.



El extremo de una de las palas de la turbina se representa mediante el punto C en la figura. Sea  $h$  la altura (medida en metros) de C con respecto al suelo, donde  $h$  varía a medida que la pala va rotando.

(a) Halle:

- (i) El valor máximo de  $h$
- (ii) El valor mínimo de  $h$

[2]

En condiciones normales, las palas de la turbina realizan 12 rotaciones completas por minuto, moviéndose a velocidad constante.

- (b) (i) Halle el tiempo (en segundos) que tarda la pala [BC] en realizar una rotación completa en estas condiciones.
- (ii) Calcule el ángulo (en grados) que rota la pala [BC] en un segundo.

[3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

La altura ( $h$ ) del punto C se puede modelizar mediante la siguiente función. El tiempo  $t$  (dado en segundos) se mide desde el instante en el que la pala [BC] pasa por primera vez por [AB].

$$h(t) = 90 - 40 \cos(72t^\circ), \quad t \geq 0.$$

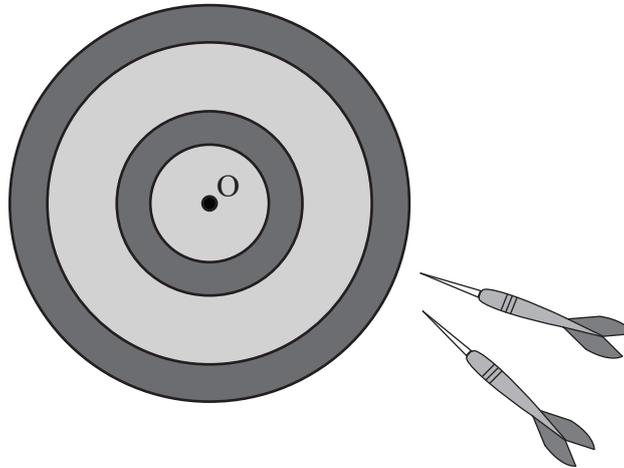
- (c) (i) Escriba la amplitud de la función.
- (ii) Halle el período de la función. [2]
- (d) Dibuje aproximadamente la función  $h(t)$  para  $0 \leq t \leq 5$ , rotulando claramente las coordenadas de los máximos y de los mínimos. [3]
- (e) (i) Halle la altura de C con respecto al suelo cuando  $t = 2$ .
- (ii) Halle el tiempo (en segundos) que pasa el punto C a una altura de más de 100 m en cada rotación completa. [5]

La velocidad del viento aumenta y las palas giran más rápido, pero siguen haciéndolo a una velocidad constante.

- (f) Sabiendo que ahora, en cada rotación completa, el punto C pasa 1 segundo a una altura de más de 110 m, halle el tiempo que tarda en realizar una rotación completa. [5]

3. [Puntuación máxima: 16]

Arianne juega una partida de dardos.



La distancia entre el lugar donde se clavan los dardos de Arianne y el centro (O) de la diana sigue una distribución normal de media 10 cm y desviación típica igual a 3 cm.

(a) Halle la probabilidad de que Arianne:

(i) Clave un dardo a menos de 13 cm de O.

(ii) Clave un dardo a más de 15 cm de O.

[3]

Cada uno de los lanzamientos de Arianne es independiente de sus lanzamientos anteriores.

(b) Halle la probabilidad de que Arianne clave dos dardos consecutivos a más de 15 cm de O.

[2]

En una partida, cada jugador lanza tres dardos en cada turno. El jugador consigue un punto si clava **todos** los dardos (los tres) dentro de la zona central que hay alrededor de O. Cuando Arianne lanza un dardo, la probabilidad de que lo clave dentro de esta zona es igual a 0,8143.

(c) Halle la probabilidad de que Arianne **no** consiga un punto en uno de esos turnos donde lanza tres dardos.

[2]

En la partida Arianne tiene diez turnos, cada uno con tres dardos.

(d) (i) Halle el valor esperado de la puntuación que obtendrá Arianne en la partida.

(ii) Halle la probabilidad de que Arianne obtenga al menos 5 puntos en esta partida.

(iii) Halle la probabilidad de que Arianne obtenga al menos 5 puntos y menos de 8 puntos.

(iv) Sabiendo que Arianne obtiene al menos 5 puntos, halle la probabilidad de que Arianne obtenga menos de 8 puntos.

[9]

4. [Puntuación máxima: 18]

Un dron volador está programado para realizar una serie de movimientos en un plano horizontal, con respecto a un origen  $O$  y unos ejes de coordenadas  $x$ - $y$ .

En cada caso, el dron se desplaza a una nueva posición, que viene determinada por las siguientes transformaciones:

- Una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de  $\frac{\pi}{6}$  radianes alrededor de  $O$
- Una simetría respecto a la recta  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$
- Una rotación en el sentido de las agujas del reloj de  $\frac{\pi}{3}$  radianes alrededor de  $O$

Todos los movimientos se realizan en el orden que acabamos de enumerar.

- (a) (i) Escriba cada una de las transformaciones en forma matricial, indicando claramente qué matriz corresponde a cada transformación.
- (ii) Halle una única matriz  $\mathbf{P}$  que defina una transformación que represente el cambio total de posición del dron.
- (iii) Halle  $\mathbf{P}^2$ .
- (iv) A partir de lo anterior, indique qué denota el valor de  $\mathbf{P}^2$  respecto a los posibles movimientos del dron. [12]
- (b) Tres drones se encuentran ubicados inicialmente en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Después de realizar los movimientos que se enumeran más arriba, los drones se encuentran en los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  respectivamente.
- Muestre que el área del triángulo  $ABC$  es igual al área del triángulo  $A'B'C'$ . [2]
- (c) Halle una única transformación que sea equivalente a las tres transformaciones que representa la matriz  $\mathbf{P}$ . [4]

5. [Puntuación máxima: 13]

(a) Sea  $z = 1 - i$ .

(i) Sitúe  $z$  en un diagrama de Argand.

(ii) Exprese  $z$  en la forma  $z = ae^{ib}$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ; dé el valor exacto de  $a$  y el valor exacto de  $b$ .

[3]

(b) Sean  $w_1 = e^{ix}$  y  $w_2 = e^{i(x-\frac{\pi}{2})}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ .

(i) Halle  $w_1 + w_2$  en la forma  $e^{ix}(c + id)$ .

(ii) A partir de lo anterior, halle  $\operatorname{Re}(w_1 + w_2)$  en la forma  $A \cos(x - \alpha)$ , donde  $A > 0$  y  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

[6]

En un circuito de corriente alterna (AC), la corriente ( $I$ ) se puede modelizar mediante la ecuación  $I = a \cos(bt - c)$ , donde  $b$  es la frecuencia y  $c$  es la diferencia de fase.

Dos fuentes de corriente alterna (AC) de la misma frecuencia se conectan de manera independiente al mismo circuito. Si se conectan al circuito individualmente, esas fuentes generan corrientes  $I_A$  e  $I_B$ . En la siguiente tabla se muestran el valor máximo y la diferencia de fase de cada una de estas corrientes.

Corriente	Valor máximo	Diferencia de fase
$I_A$	12 amperios	0
$I_B$	12 amperios	$\frac{\pi}{2}$

Cuando las dos fuentes de corriente se conectan al circuito simultáneamente, la corriente total ( $I_T$ ) se puede expresar como  $I_A + I_B$ .

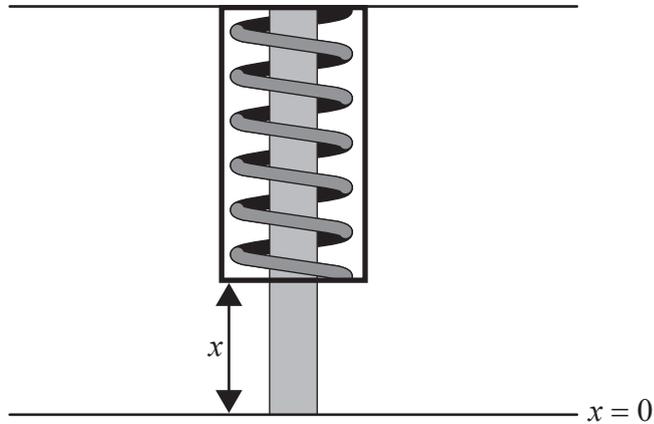
(c) (i) Halle el valor máximo de  $I_T$ .

(ii) Halle la diferencia de fase de  $I_T$ .

[4]

6. [Puntuación máxima: 15]

El amortiguador de un coche consta de un muelle que está rodeado por líquido. Cuando el coche pasa por un terreno irregular, el muelle se comprime y luego vuelve a su posición de equilibrio.



El desplazamiento ( $x$ ) del muelle se mide (en centímetros) respecto a la posición de equilibrio, en la que  $x = 0$ . El valor de  $x$  se puede modelizar mediante la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, donde  $t$  es el tiempo (en segundos) transcurrido desde el desplazamiento inicial.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 1,25x = 0$$

- (a) Sabiendo que  $y = \dot{x}$ , muestre que  $\dot{y} = -1,25x - 3y$ . [2]

La ecuación diferencial se puede expresar en la forma  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , donde  $A$  es una matriz  $2 \times 2$ .

- (b) Escriba la matriz  $A$ . [1]

- (c) (i) Halle los valores propios de la matriz  $A$ .

- (ii) Halle los vectores propios de la matriz  $A$ . [6]

- (d) Sabiendo que para  $t = 0$  el amortiguador está desplazado 8 cm y su velocidad es igual a cero, halle una expresión que dé  $x$  en función de  $t$ . [6]

7. [Puntuación máxima: 14]

Loreto es la directora del centro de salud Da Vinci. Si la tasa media de pacientes que llegan al centro de salud supera los 1,5 pacientes por minuto, Loreto contratará a más personal. Se supone que el número de pacientes que llegan al centro durante un período de tiempo cualquiera sigue una distribución de Poisson.

Loreto lleva a cabo un contraste de hipótesis para determinar si debería contratar a más personal. Encuentra que, a lo largo de un período de 3 horas elegido al azar, llegaron al centro 320 pacientes.

- (a) (i) Escriba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para el contraste de Loreto.
- (ii) Utilizando los datos de la muestra de Loreto, realice el contraste de hipótesis a un nivel de significación del 5% para determinar si Loreto debería contratar a más personal.

[7]

A Loreto también le preocupa el tiempo de espera promedio de los pacientes hasta que les atiende un enfermero. El objetivo del centro de salud es que al menos al 95% de los pacientes les atienda un enfermero en menos de 20 minutos.

Loreto supone que los tiempos de espera de los pacientes son independientes unos de otros y decide realizar un contraste de hipótesis a un nivel de significación del 10% para determinar si el centro de salud está cumpliendo su objetivo.

Loreto pregunta a 150 pacientes y encuentra que 11 de ellos tuvieron que esperar más de 20 minutos.

- (b) (i) Escriba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para este contraste.
- (ii) Realice el contraste, indicando claramente la conclusión a la que llega en el contexto de la pregunta.

[7]

---

Fuentes: