

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques : applications et interprétation

Niveau supérieur

Épreuve 2

Mardi 2 novembre 2021 (matin)

2 heures

Instructions destinées aux candidats

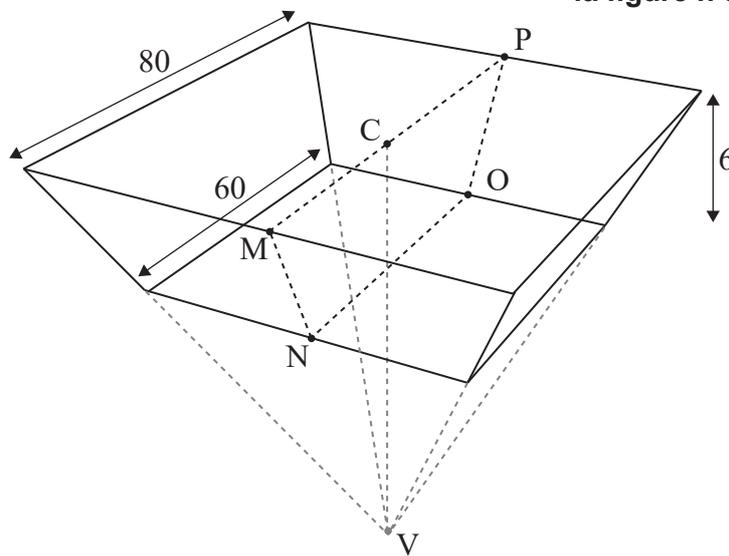
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 14]

Un grand réservoir d'eau est construit sous la forme d'une partie d'une pyramide droite à l'envers avec une base carrée horizontale dont le côté mesure 80 mètres de longueur. Le point C est le centre de la base carrée et le point V est le sommet de la pyramide.

la figure n'est pas à l'échelle

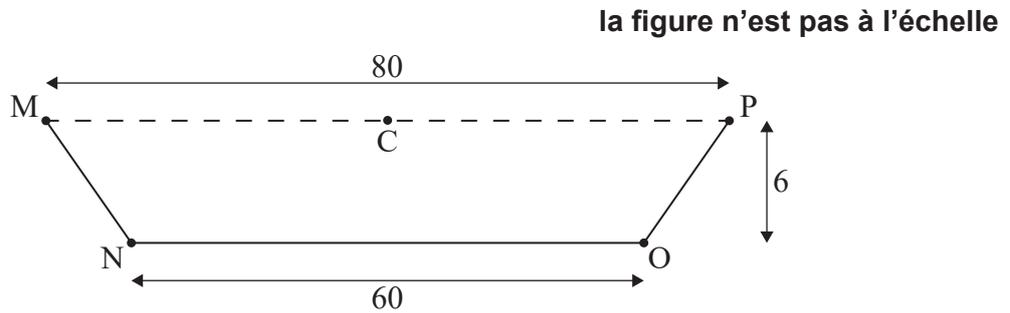


Le fond du réservoir est un carré dont le côté mesure 60 mètres de longueur et qui est parallèle à la base de la pyramide, de sorte que la profondeur du réservoir est de 6 mètres, tel qu'indiqué dans le diagramme.

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Le deuxième diagramme montre une coupe verticale, MNOPC, du réservoir.



(a) Trouvez l'angle de dépression de M à N. [2]

(b) (i) Trouvez CV.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, montrez que le volume du réservoir est de $29\,600\text{ m}^3$. [5]

Chaque jour, 80 m^3 d'eau provenant du réservoir sont utilisés pour l'irrigation.

Joshua affirme que, s'il n'y a pas d'autre eau qui entre ou qui sort du réservoir, alors lorsque ce dernier est plein, il y a suffisamment d'eau pour l'irrigation pendant au moins un an.

(c) En trouvant une valeur appropriée, déterminez si l'affirmation de Joshua est correcte. [2]

Pour éviter que l'eau ne s'écoule dans le sol, les cinq côtés intérieurs du réservoir ont été peints avec un matériau étanche.

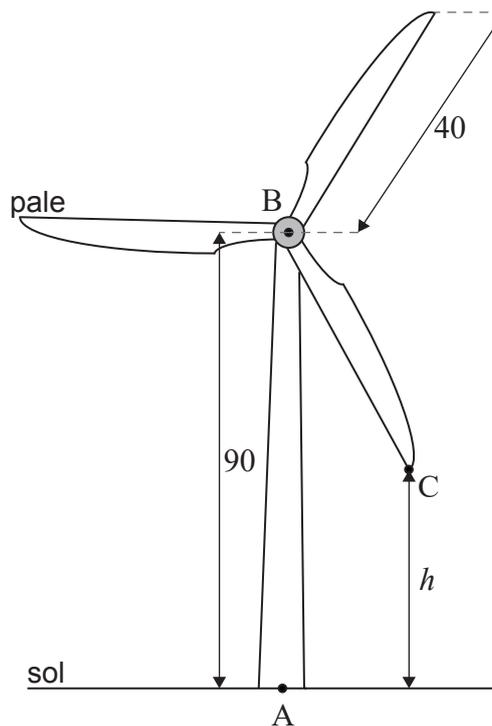
(d) Trouvez l'aire qui a été peinte. [5]

2. [Note maximale : 20]

Une éolienne est conçue pour que la rotation des pales génère de l'électricité. L'éolienne est construite sur un sol horizontal et se compose d'une tour verticale et de trois pales.

Le point A est à la base de la tour, directement en dessous du point B qui est situé au sommet de la tour. La hauteur de la tour, AB, est de 90 m. Les pales de l'éolienne sont centrées en B et chacune d'entre elles a une longueur de 40 m. Ceci est montré dans le diagramme suivant.

la figure n'est pas à l'échelle



Le bout d'une des pales de l'éolienne est représenté par le point C sur le diagramme. Soit h la hauteur de C au-dessus du sol, mesurée en mètres, où h varie lorsque la pale tourne.

(a) Trouvez

(i) la valeur maximale de h .

(ii) la valeur minimale de h .

[2]

Les pales de l'éolienne effectuent 12 tours complets par minute dans des conditions normales, se déplaçant à une vitesse constante.

(b) (i) Trouvez le temps, en secondes, que prend la pale [BC] pour effectuer un tour complet dans ces conditions.

(ii) Calculez l'angle, en degrés, décrit par la pale [BC] en une seconde.

[3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

La hauteur, h , du point C peut être modélisée par la fonction suivante. Le temps, t , est mesuré à partir de l'instant où la pale [BC] passe pour la première fois par [AB] et il est mesuré en secondes.

$$h(t) = 90 - 40 \cos(72t^\circ), \quad t \geq 0$$

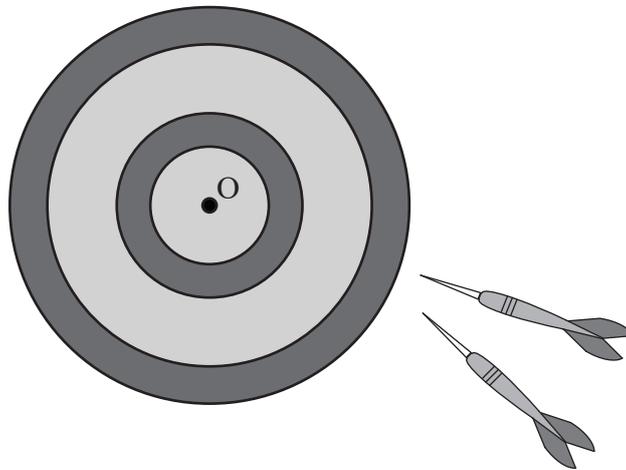
- (c) (i) Écrivez l'amplitude de la fonction.
- (ii) Trouvez la période de la fonction. [2]
- (d) Esquissez la fonction $h(t)$ pour $0 \leq t \leq 5$, en légendant clairement les coordonnées des points maximum et minimum. [3]
- (e) (i) Trouvez la hauteur de C au-dessus du sol lorsque $t = 2$.
- (ii) Trouvez le temps, en secondes, durant lequel le point C est au-dessus d'une hauteur de 100 m, pendant chaque tour complet. [5]

La vitesse du vent augmente et les pales tournent plus vite, mais toujours à une vitesse constante.

- (f) Étant donné que le point C est maintenant au-dessus de 110 m durant une seconde pendant chaque tour complet, trouvez le temps requis pour effectuer un tour complet. [5]

3. [Note maximale : 16]

Arianne joue aux fléchettes.



La distance à laquelle ses fléchettes atterrissent par rapport au centre, O, de la cible peut être modélisée par une distribution normale avec une moyenne de 10 cm et un écart type de 3 cm.

(a) Trouvez la probabilité

(i) qu'une fléchette atterrisse à moins de 13 cm de O.

(ii) qu'une fléchette atterrisse à plus de 15 cm de O.

[3]

Chacun des lancers d'Arianne est indépendant de ses lancers précédents.

(b) Trouvez la probabilité qu'Arianne lance deux fléchettes consécutives qui atterrissent à plus de 15 cm de O.

[2]

Dans une compétition, un joueur doit lancer trois fléchettes lors de son tour. Un point est marqué si **les trois** fléchettes lancées par le joueur atterrissent dans une zone centrale autour de O. Lorsqu'Arianne lance une fléchette, la probabilité qu'elle atterrisse dans cette zone est de 0,8143.

(c) Trouvez la probabilité qu'Arianne ne marque **pas** de point lors de son tour avec trois fléchettes.

[2]

Lors de la compétition, Arianne a dix tours, chacun avec trois fléchettes.

(d) (i) Trouvez le résultat espéré d'Arianne dans la compétition.

(ii) Trouvez la probabilité qu'Arianne marque au moins 5 points dans la compétition.

(iii) Trouvez la probabilité qu'Arianne marque au moins 5 points et moins de 8 points.

(iv) Étant donné qu'Arianne marque au moins 5 points, trouvez la probabilité qu'Arianne marque moins de 8 points.

[9]

4. [Note maximale : 18]

Un drone volant est programmé pour effectuer une série de mouvements dans un plan horizontal par rapport à une origine O et à un système d'axes x et y .

Dans chaque cas, le drone se déplace vers une nouvelle position représentée par les transformations suivantes :

- une rotation antihoraire de $\frac{\pi}{6}$ radian autour de O .
- une réflexion par rapport à la droite $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.
- une rotation horaire de $\frac{\pi}{3}$ radian autour de O .

Tous les mouvements sont effectués dans l'ordre donné.

- (a) (i) Écrivez chacune des transformations sous forme de matrice, en indiquant clairement quelle matrice représente chaque transformation.
- (ii) Trouvez une matrice unique \mathbf{P} qui définit une transformation représentant le changement global de position.
- (iii) Trouvez \mathbf{P}^2 .
- (iv) À partir de là, indiquez ce que la valeur de \mathbf{P}^2 représente pour le mouvement possible du drone. [12]
- (b) Trois drones sont initialement positionnés aux points A , B et C . Après avoir effectué les mouvements donnés ci-dessus, les drones sont positionnés respectivement aux points A' , B' et C' .
- Montrez que l'aire du triangle ABC est égale à l'aire du triangle $A'B'C'$. [2]
- (c) Trouvez une transformation unique qui est équivalente aux trois transformations représentées par la matrice \mathbf{P} . [4]

5. [Note maximale : 13]

(a) Soit $z = 1 - i$.

(i) Placez le point z sur un diagramme d'Argand.

(ii) Exprimez z sous la forme $z = ae^{ib}$, où $a, b \in \mathbb{R}$, en donnant la valeur exacte de a et la valeur exacte de b .

[3]

(b) Soit $w_1 = e^{ix}$ et $w_2 = e^{i(x-\frac{\pi}{2})}$, où $x \in \mathbb{R}$.

(i) Trouvez $w_1 + w_2$ sous la forme $e^{ix}(c + id)$.

(ii) À partir de là, trouvez $\operatorname{Re}(w_1 + w_2)$ sous la forme $A \cos(x - \alpha)$, où $A > 0$ et $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

[6]

Le courant, I , dans un circuit de courant alternatif peut être modélisé par l'équation $I = a \cos(bt - c)$, où b est la fréquence et c le déphasage.

Deux sources de tension alternative de même fréquence sont connectées au même circuit de façon indépendante. Si elles sont connectées individuellement au circuit, elles génèrent respectivement des courants I_A et I_B . La valeur maximale et le déphasage de chaque courant sont indiqués dans le tableau suivant.

Courant	Valeur maximale	Déphasage
I_A	12 ampères	0
I_B	12 ampères	$\frac{\pi}{2}$

Lorsque les deux sources de tension sont connectées au circuit en même temps, le courant total I_T peut être exprimé comme $I_A + I_B$.

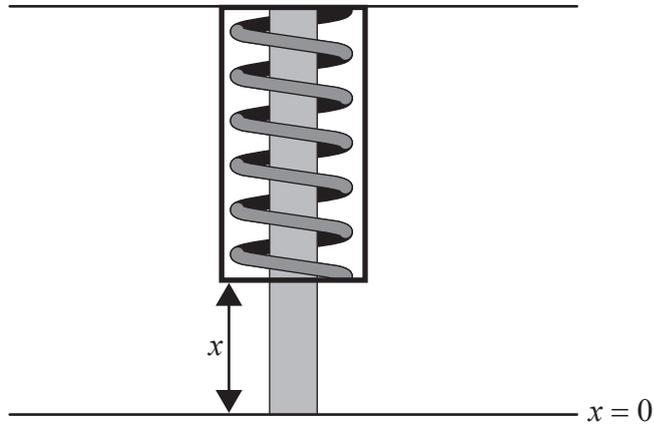
(c) (i) Trouvez la valeur maximale de I_T .

(ii) Trouvez le déphasage de I_T .

[4]

6. [Note maximale : 15]

Un amortisseur sur une voiture contient un ressort entouré d'un fluide. Lorsque la voiture se déplace sur un sol irrégulier, le ressort est comprimé puis revient à une position d'équilibre.



Le déplacement, x , du ressort est mesuré, en centimètres, à partir de la position d'équilibre $x = 0$. La valeur de x peut être modélisée par l'équation différentielle du deuxième ordre suivante, où t est le temps, mesuré en secondes, après le déplacement initial.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 1,25x = 0$$

(a) Étant donné que $y = \dot{x}$, montrez que $\dot{y} = -1,25x - 3y$. [2]

L'équation différentielle peut être exprimée sous la forme $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où A est une matrice 2×2 .

(b) Écrivez la matrice A . [1]

(c) (i) Trouvez les valeurs propres de la matrice A .

(ii) Trouvez les vecteurs propres de la matrice A . [6]

(d) Étant donné que lorsque $t = 0$, l'amortisseur se déplace de 8 cm et que sa vitesse algébrique est nulle, trouvez une expression pour x en fonction de t . [6]

7. [Note maximale : 14]

Loreto est une des responsables du centre de santé Da Vinci. Si le taux moyen de patients arrivant au centre de santé dépasse 1,5 par minute, alors Loreto emploiera du personnel supplémentaire. On suppose que le nombre de patients arrivant au cours d'une période donnée suit une distribution de Poisson.

Loreto effectue un test d'hypothèses pour déterminer si elle devrait employer du personnel supplémentaire. Elle constate que 320 patients sont arrivés au cours d'une période de 3 heures choisie au hasard.

- (a) (i) Écrivez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative pour le test de Loreto.
- (ii) En utilisant les données de l'échantillon de Loreto, effectuez le test d'hypothèses à un niveau de signification de 5 % pour déterminer si Loreto devrait employer du personnel supplémentaire. [7]

Loreto est également préoccupée par le temps d'attente moyen des patients pour voir une infirmière. Le centre de santé vise à ce qu'au moins 95 % des patients voient une infirmière en moins de 20 minutes.

Loreto suppose que les temps d'attente des patients sont indépendants les uns des autres et décide d'effectuer un test d'hypothèses à un niveau de signification de 10 % pour déterminer si le centre de santé atteint son objectif.

Loreto interroge 150 patients et constate que 11 d'entre eux ont attendu plus de 20 minutes.

- (b) (i) Écrivez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative pour ce test.
- (ii) Effectuez le test, en indiquant clairement la conclusion dans son contexte. [7]

Références :