Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: aplicaciones e interpretación
Nivel medio
Prueba 1

Lunes 1 de noviembre de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

8821 – 7224

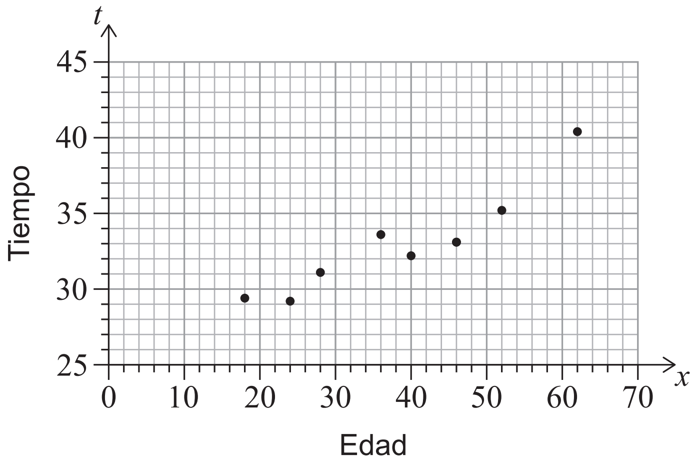
Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 6]

Eduardo cree que existe una relación lineal entre la edad de los corredores varones y el tiempo que tardan en correr 5000 metros.

Para poner a prueba esta teoría, anota la edad (x años) de ocho varones y el tiempo (t minutos) que tardan en completar una única carrera de $5000\,\mathrm{m}$. Los resultados que obtiene Eduardo se presentan en la siguiente tabla y en el siguiente diagrama de dispersión.

***x* (años)**	18	24	28	36	40	46	52	62
***t* (minutos)**	29,4	29,2	31,1	33,6	32,2	33,1	35,2	40,4



(a) Para estos datos, halle el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r). [2]

Eduardo consulta un libro de texto de ciencias del deporte. Ahí lee que la siguiente información referida a r se puede aplicar al ámbito del rendimiento deportivo.

Valor de $\lvert r \rvert$	**Descripción de la correlación**
$0 \le \lvert r \rvert < 0{,}4$	débil
$0{,}4 \le \lvert r \rvert < 0{,}8$	moderada
$0{,}8 \le \lvert r \rvert \le 1$	fuerte

(b) Comente la respuesta que ha dado en el apartado (a), utilizando para ello la información que encontró Eduardo. [1]

(c) Escriba la ecuación de la recta de regresión de t sobre x, dándola en la forma $t = ax + b$. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

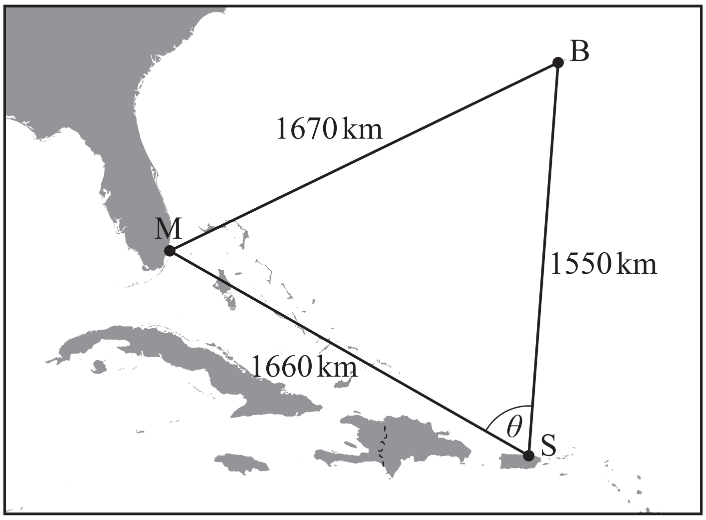
Hubo un varón de 57 años que también participó en la carrera de $5000\,\mathrm{m}$.

(d) Utilice la ecuación de la recta de regresión para estimar el tiempo que tardó en completar la carrera de $5000\,\mathrm{m}$. [2]

2. [Puntuación máxima: 5]

El Triángulo de las Bermudas es una región del océano Atlántico que tiene por vértices a Miami (M), las Bermudas (B) y San Juan (S), tal y como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



La siguiente tabla muestra las distancias que hay entre M, B y S, redondeando a tres cifras significativas.

Distancia entre Miami y las Bermudas	1670 km
Distancia entre las Bermudas y San Juan	1550 km
Distancia entre San Juan y Miami	1660 km

(a) Calcule el valor de θ (el tamaño del ángulo $\mathrm{M\hat{S}B}$). [3]

(b) Halle el área del Triángulo de las Bermudas. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

3. [Puntuación máxima: 4]

Natasha lleva a cabo un experimento sobre el crecimiento del moho. Ella cree que el crecimiento se puede modelizar mediante una función exponencial

$$P(t) = A\mathrm{e}^{kt},$$

donde P es el área que está cubierta por moho (en mm^2), t es el tiempo (en días) transcurrido desde el inicio del experimento, y A y k son constantes.

El área cubierta por moho es igual a $112\,\mathrm{mm}^2$ al inicio del experimento e igual a $360\,\mathrm{mm}^2$ al cabo de 5 días.

(a) Escriba el valor de A. [1]

(b) Halle el valor de k. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

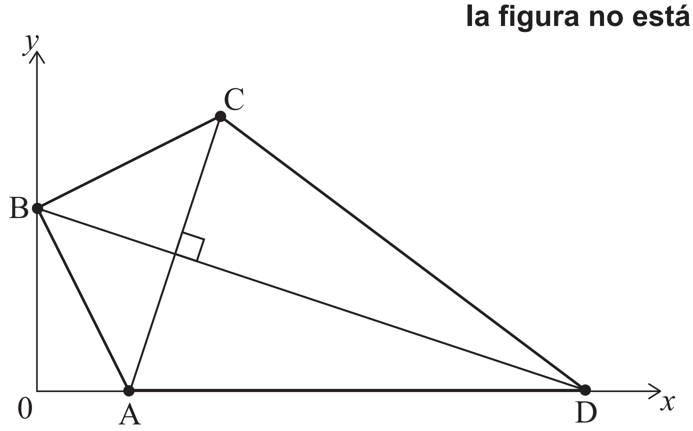
. . . .

4. [Puntuación máxima: 6]

Dilara está diseñando una cometa (ABCD) en unos ejes de coordenadas en los que una unidad representa $10\,\text{cm}$.

Las coordenadas de A, B y C son $(2\,,\ 0)$, $(0\,,\ 4)$ y $(4\,,\ 6)$, respectivamente. El punto D está en el eje x. $[\text{AC}]$ es perpendicular a $[\text{BD}]$. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle la pendiente de la recta que pasa por A y C. [2]

(b) Escriba la pendiente de la recta que pasa por B y D. [1]

(c) Halle la ecuación de la recta que pasa por B y D. Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde a, b y d son números enteros. [2]

(d) Escriba la coordenada x del punto D. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 7]

Sea $h(x)$ la función que representa la altura (en centímetros) de una lata cilíndrica de $x\,\text{cm}$ de diámetro.

$$h(x) = \frac{640}{x^2} + 0{,}5 \text{ para } 4 \le x \le 14\,.$$

(a) Halle el recorrido de h. [3]

La función h^{-1} es la función inversa de h.

(b) (i) Halle $h^{-1}(10)$.

(ii) En el contexto de esta pregunta, interprete la respuesta que ha dado en el apartado (b)(i).

(iii) Escriba el recorrido de h^{-1}. [4]

6. [Puntuación máxima: 5]

Unos inspectores están investigando las emisiones de dióxido de carbono de una central eléctrica. Sea R el ritmo (en toneladas por hora) al que se está emitiendo dióxido de carbono y sea t el tiempo transcurrido (en horas) desde que se inició la inspección.

Cuando se representa gráficamente R en función de t, la cantidad total de dióxido de carbono emitido viene dada por el área que hay entre el gráfico y el eje t horizontal.

Se mide el ritmo de emisiones (R) a lo largo de dos horas. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
R	30	50	60	40	20	50

(a) Utilice la regla del trapecio con intervalos de anchura $0{,}4$ para estimar la cantidad total de dióxido de carbono que se ha emitido durante esas dos horas. [3]

La cantidad real de dióxido de carbono que se emitió durante esas dos horas fue de 72 toneladas.

(b) Halle el porcentaje de error de la estimación que halló en el apartado (a). [2]

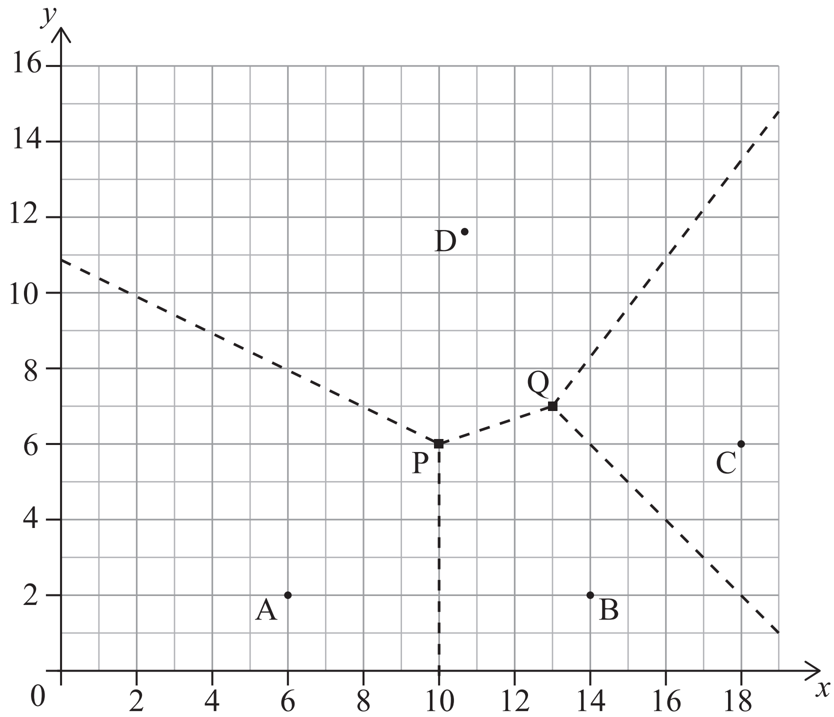
. . . .

7. [Puntuación máxima: 6]

Hay cuatro estaciones que utilizan los guardas forestales de un parque nacional.

En el siguiente diagrama de Voronoi, las coordenadas de las estaciones son $\text{A}(6\,,\ 2)$, $\text{B}(14\,,\ 2)$, $\text{C}(18\,,\ 6)$ y $\text{D}(10{,}8\,;\ 11{,}6)$, donde las distancias vienen dadas en kilómetros.

Las líneas discontinuas representan los límites de las regiones que patrullan los guardas forestales de cada estación. Los límites coinciden en $\text{P}(10\,,\ 6)$ y en $\text{Q}(13\,,\ 7)$.



Con el fin de reducir el área de las regiones que patrullan los guardas forestales, se va a construir una nueva estación dentro del cuadrilátero ABCD. La nueva estación se ubicará de tal manera que esté lo más lejos posible de la estación existente más próxima.

(a) Muestre que la nueva estación se debería construir en P. [3]

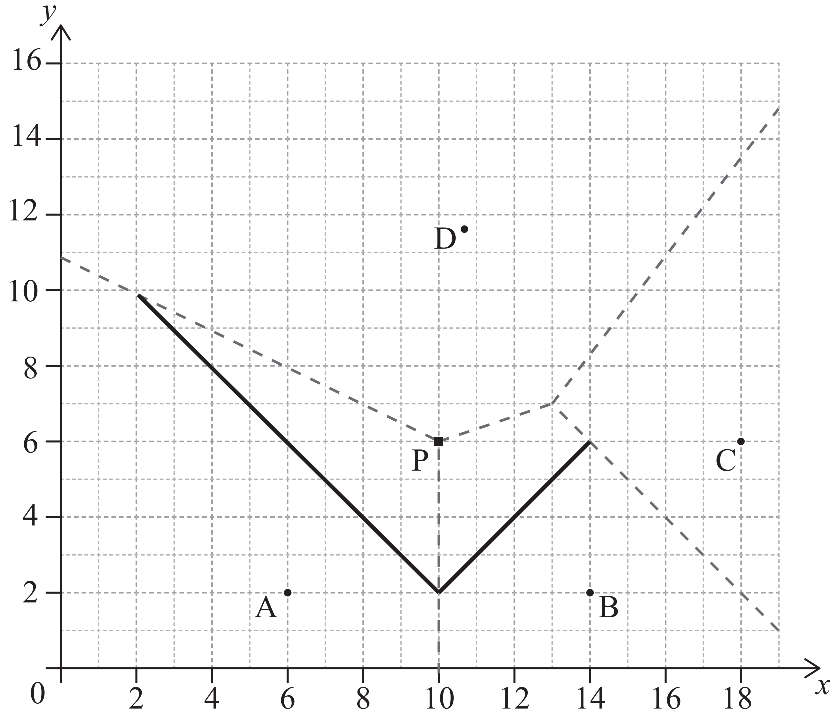
Se va a actualizar el diagrama de Voronoi para incluir la región que rodea a la nueva estación ubicada en P. Por ello, se han añadido al siguiente diagrama las aristas definidas por las mediatrices de [AP] y de [BP].

(b) (i) Escriba la ecuación de la mediatriz de [PC].

(ii) A partir de lo anterior, dibuje con precisión en el siguiente diagrama los límites que faltan de la región que rodea a P. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

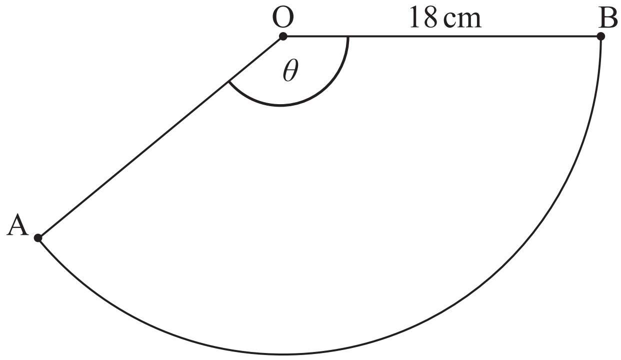
(Pregunta 7: continuación)



8. [Puntuación máxima: 5]

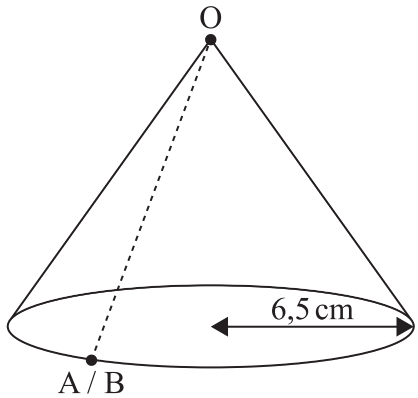
Joey está fabricando un gorro de fiesta con forma de cono. El gorro está hecho a partir de un sector circular (AOB) que procede de un trozo de papel circular de $18\,\mathrm{cm}$ de radio. Además, $\mathrm{A\hat{O}B} = \theta$, tal y como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



Para fabricar el gorro, se unen los lados $[\mathrm{OA}]$ y $[\mathrm{OB}]$. La base del gorro tiene $6{,}5\,\mathrm{cm}$ de radio.

la figura no está dibujada a escala



(a) (i) Escriba, en función de π, el perímetro de la base del gorro.

(ii) Halle el valor de θ. [3]

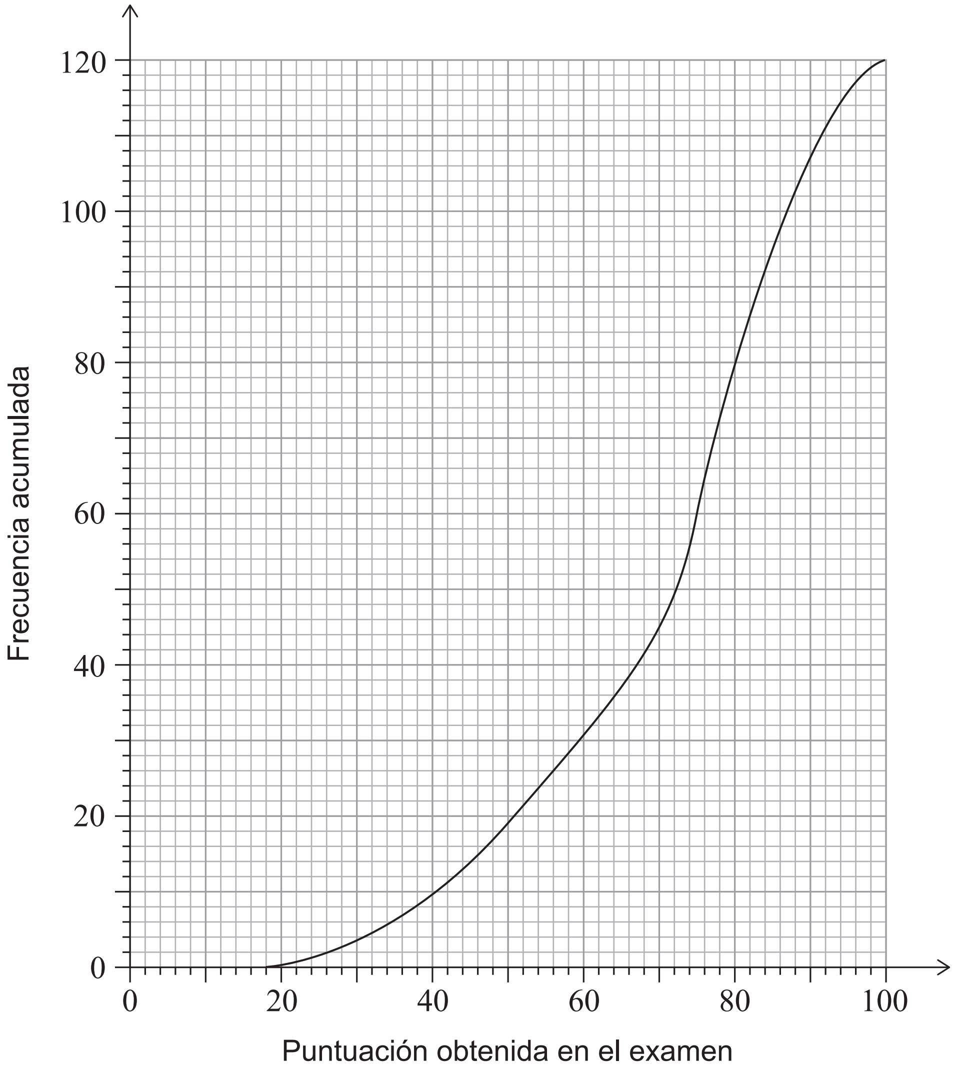
(b) Halle el área de la superficie externa del gorro. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 8: continuación)

9. [Puntuación máxima: 8]

Un grupo de 120 alumnos se ha presentado a un examen de Historia. El siguiente gráfico de frecuencia acumulada muestra las puntuaciones que han obtenido los alumnos.



(a) Halle la mediana de las puntuaciones obtenidas. [1]

A los alumnos se les concedió una calificación de entre 1 y 5, dependiendo de la puntuación que hubieran obtenido en el examen. En la siguiente tabla se muestra el número de alumnos que recibieron cada calificación.

Calificación	1	2	3	4	5
Número de alumnos	6	13	26	a	b

(b) Halle una expresión que dé a en función de b. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 9: continuación)

(c) La calificación media de estos alumnos es de $3{,}65$.

(i) Halle el número de alumnos que obtuvieron una calificación de 5.

(ii) Halle la puntuación mínima que se necesita para obtener una calificación de 5. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

10. [Puntuación máxima: 9]

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a 2 lugares decimales.

Raúl y Rosy quieren comprarse una casa nueva y, para ello, necesitan un préstamo del banco por valor de $170\,000$ dólares australianos (AUD). El préstamo es a 30 años y el tipo de interés anual que se aplica al préstamo es del $3{,}8\,\%$, compuesto mensualmente. Raúl y Rosy devolverán el préstamo pagando una cuota mensual fija al final de cada mes.

(a) Halle la cantidad que pagarán al banco cada mes. [3]

(b) (i) Halle la cantidad que Raúl y Rosy deberán todavía al banco al final de los 10 primeros años.

(ii) Utilice las respuestas halladas en los apartados (a) y (b)(i) para calcular cuántos intereses habrán pagado en total durante esos 10 primeros años. [6]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

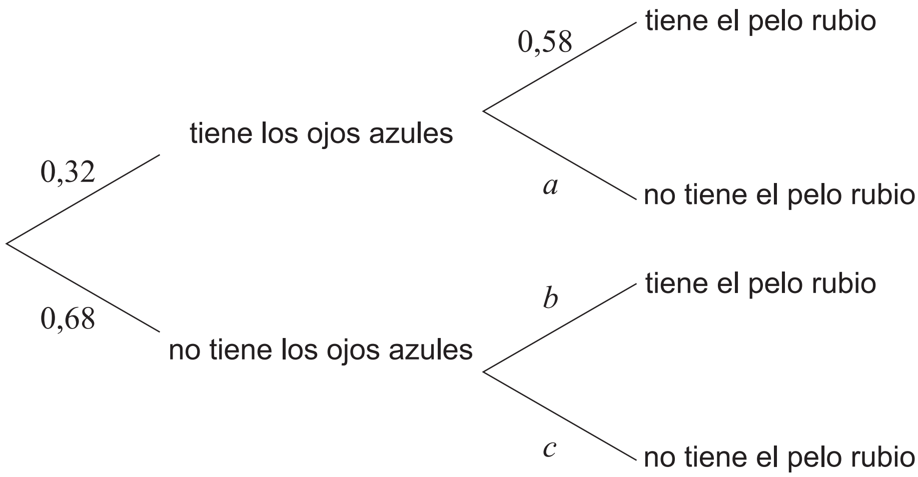
. . . .

. . . .

. . . .

11. [Puntuación máxima: 5]

En una determinada ciudad, el 32% de las personas tienen los ojos azules. Si alguien tiene los ojos azules, la probabilidad de que también tenga el pelo rubio es del 58%. Toda esta información aparece representada en el siguiente diagrama de árbol.



(a) Escriba el valor de a. [1]

(b) Halle una expresión, en función de b, que dé la probabilidad de que una persona no tenga los ojos azules **y** tenga el pelo rubio. [1]

Se sabe que, en esta ciudad, el 41% de las personas tienen el pelo rubio.

(c) Calcule el valor de:

(i) b

(ii) c [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 11: continuación)

12. [Puntuación máxima: 6]

El área de la superficie de una caja abierta —de $32\,\text{cm}^3$ de volumen y con una base cuadrada cuyos lados miden $x\,\text{cm}$ de largo— viene dada por $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$, donde $x > 0$.

(a) Halle $S'(x)$. [3]

(b) (i) Resuelva $S'(x) = 0$.

(ii) Interprete la respuesta que ha dado en (b)(i) en el contexto de la pregunta. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

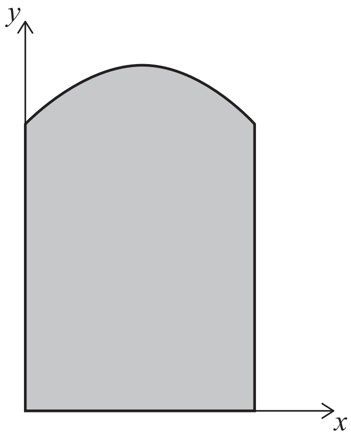
. . . .

. . . .

. . . .

13. [Puntuación máxima: 8]

Irina utiliza unos ejes de coordenadas para dibujar el diseño de una ventana. La base de la ventana está en el eje x, la parte superior de la ventana tiene forma de curva cuadrática y los lados son líneas verticales, tal y como se muestra en la figura. Los extremos de la curva son los puntos $(0,\ 10)$ y $(8,\ 10)$, y el vértice de la curva está en $(4,\ 12)$. Las distancias vienen dadas en centímetros.



La curva cuadrática se puede expresar en la forma $y = ax^2 + bx + c$, para $0 \le x \le 8$.

(a) (i) Escriba el valor de c.

(ii) A partir de lo anterior, plantee dos ecuaciones donde las incógnitas sean a y b.

(iii) A partir de lo anterior, halle la ecuación de la curva cuadrática. [5]

(b) Halle el área de la región que está sombreada en el diseño de Irina. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 13: continuación)

Fuentes :

2. Bermuda Triangle map https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bermuda_Triangle_map_(de).svg Thomas Römer.
Este archivo está disponible bajo la licencia Creative Commons Atribución-CompartirIgual 3.0 No Portada.
(CC BY-SA 3.0) https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es [consultado el 17 de diciembre de 2020]
Fuente adaptada.