Matemáticas: aplicaciones e interpretación
Nivel superior
Prueba 1

Lunes 1 de noviembre de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8821 – 7221

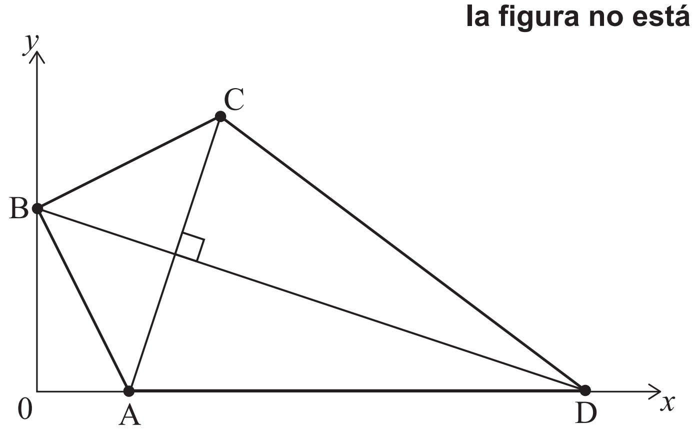
Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 6]

Dilara está diseñando una cometa (ABCD) en unos ejes de coordenadas en los que una unidad representa $10\,\mathrm{cm}$.

Las coordenadas de A, B y C son $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$ y $(4,\ 6)$ respectivamente. El punto D está en el eje x. $[\mathrm{AC}]$ es perpendicular a $[\mathrm{BD}]$. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle la pendiente de la recta que pasa por A y C. [2]

(b) Escriba la pendiente de la recta que pasa por B y D. [1]

(c) Halle la ecuación de la recta que pasa por B y D. Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde a, b y d son números enteros. [2]

(d) Escriba la coordenada x del punto D. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 5]

Unos inspectores están investigando las emisiones de dióxido de carbono de una central eléctrica. Sea R el ritmo (en toneladas por hora) al que se está emitiendo dióxido de carbono y sea t el tiempo transcurrido (en horas) desde que se inició la inspección.

Cuando se representa gráficamente R en función de t, la cantidad total de dióxido de carbono emitido viene dada por el área que hay entre el gráfico y el eje t horizontal.

Se mide el ritmo de emisiones (R) a lo largo de dos horas. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
R	30	50	60	40	20	50

(a) Utilice la regla del trapecio con intervalos de anchura $0{,}4$ para estimar la cantidad total de dióxido de carbono que se ha emitido durante esas dos horas. [3]

La cantidad real de dióxido de carbono que se emitió durante esas dos horas fue de 72 toneladas.

(b) Halle el porcentaje de error de la estimación que halló en el apartado (a). [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 7]

Sea $h(x)$ la función que representa la altura (en centímetros) de una lata cilíndrica de $x\,\mathrm{cm}$ de diámetro.

$$h(x) = \frac{640}{x^2} + 0{,}5 \text{ para } 4 \le x \le 14.$$

(a) Halle el recorrido de h. [3]

La función h^{-1} es la función inversa de h.

(b) (i) Halle $h^{-1}(10)$.

(ii) En el contexto de esta pregunta, interprete la respuesta que ha dado en el apartado (b)(i).

(iii) Escriba el recorrido de h^{-1}. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

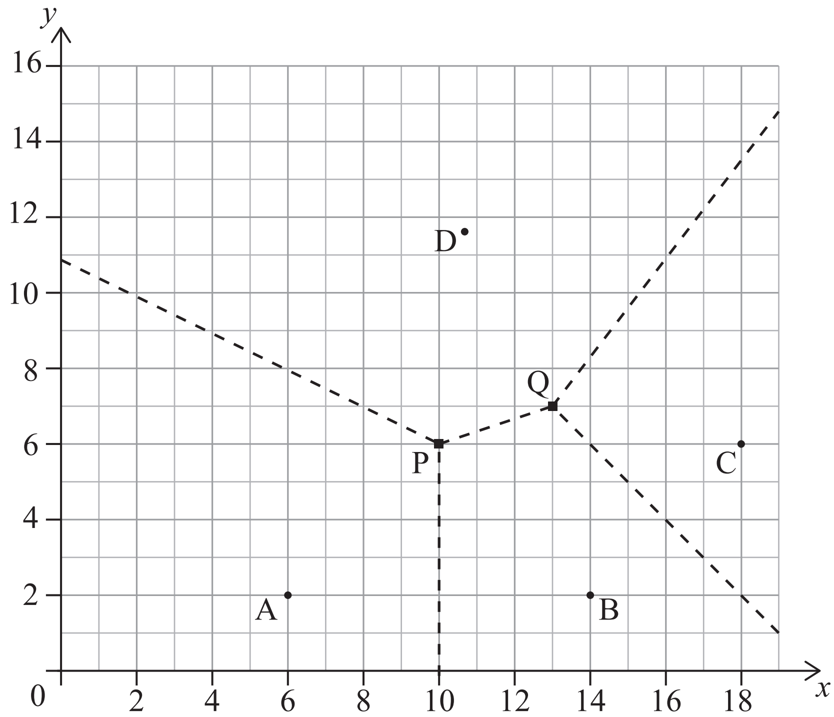
. . . .

4. [Puntuación máxima: 6]

Hay cuatro estaciones que utilizan los guardas forestales de un parque nacional.

En el siguiente diagrama de Voronoi, las coordenadas de las estaciones son $\mathrm{A}(6\,,\ 2)$, $\mathrm{B}(14\,,\ 2)$, $\mathrm{C}(18\,,\ 6)$ y $\mathrm{D}(10{,}8\,;\ 11{,}6)$, donde las distancias vienen dadas en kilómetros.

Las líneas discontinuas representan los límites de las regiones que patrullan los guardas forestales de cada estación. Los límites coinciden en $\mathrm{P}(10\,,\ 6)$ y en $\mathrm{Q}(13\,,\ 7)$.



Con el fin de reducir el área de las regiones que patrullan los guardas forestales, se va a construir una nueva estación dentro del cuadrilátero ABCD. La nueva estación se ubicará de tal manera que esté lo más lejos posible de la estación existente más próxima.

(a) Muestre que la nueva estación se debería construir en P. [3]

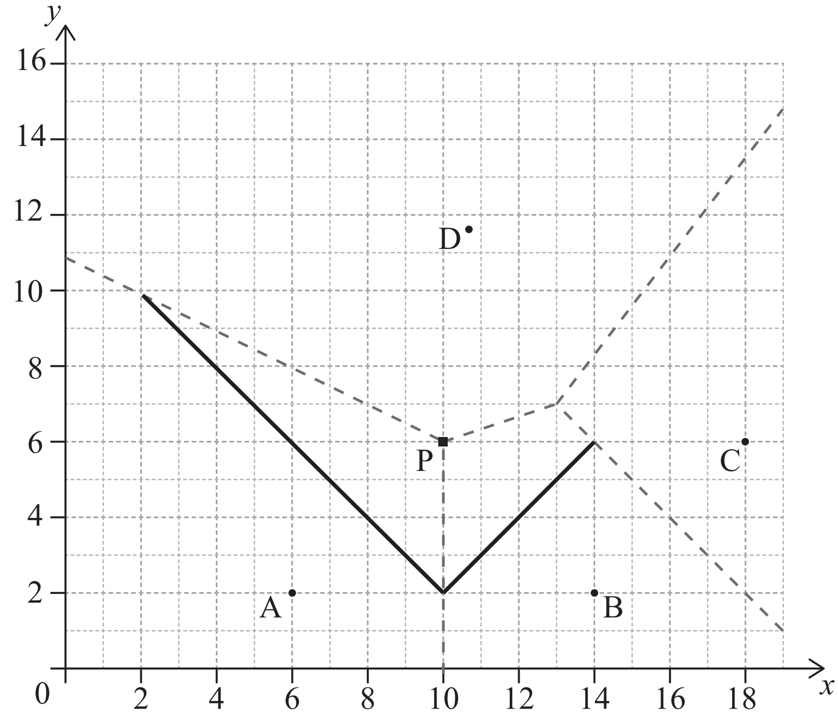
Se va a actualizar el diagrama de Voronoi para incluir la región que rodea a la nueva estación ubicada en P. Por ello, se han añadido al siguiente diagrama las aristas definidas por las mediatrices de $[\mathrm{AP}]$ y de $[\mathrm{BP}]$.

(b) (i) Escriba la ecuación de la mediatriz de $[\mathrm{PC}]$.

(ii) A partir de lo anterior, dibuje con precisión en el siguiente diagrama los límites que faltan de la región que rodea a P. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)



5. [Puntuación máxima: 9]

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a 2 lugares decimales.

Raúl y Rosy quieren comprarse una casa nueva y, para ello, necesitan un préstamo del banco por valor de $170\,000$ dólares australianos (AUD). El préstamo es a 30 años y el tipo de interés anual que se aplica al préstamo es del $3{,}8\,\%$, compuesto mensualmente. Raúl y Rosy devolverán el préstamo pagando una cuota mensual fija al final de cada mes.

(a) Halle la cantidad que pagarán al banco cada mes. [3]

(b) (i) Halle la cantidad que Raúl y Rosy deberán todavía al banco al final de los 10 primeros años.

(ii) Utilice las respuestas halladas en los apartados (a) y (b)(i) para calcular cuántos intereses habrán pagado en total durante esos 10 primeros años. [6]

. . . .

6. [Puntuación máxima: 5]

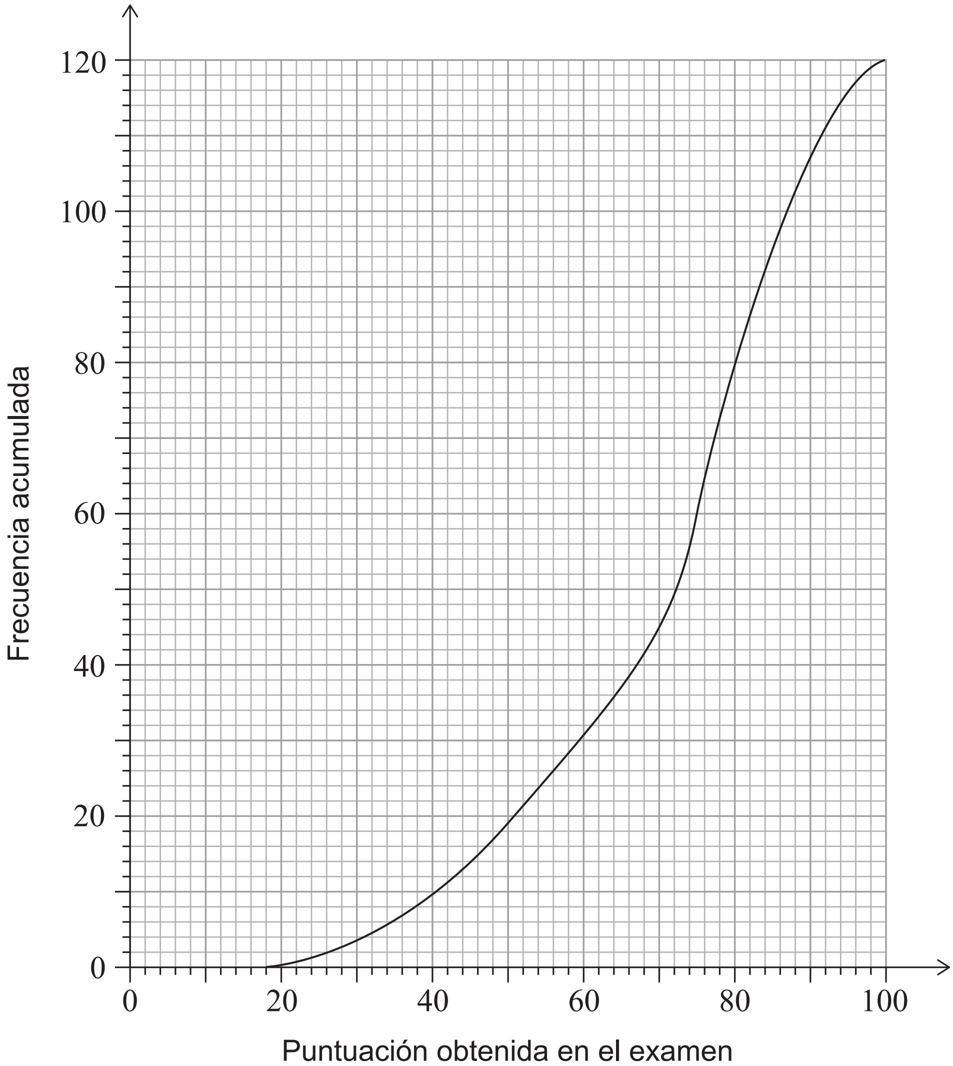
Una progresión geométrica infinita con término general u_n es tal que $u_1 = 2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 10$.

(a) Halle la razón común (r) de esta progresión. [2]

(b) Halle el valor más pequeño de n para el que se cumple que $u_n < \frac{1}{2}$. [3]

7. [Puntuación máxima: 8]

Un grupo de 120 alumnos se ha presentado a un examen de Historia. El siguiente gráfico de frecuencia acumulada muestra las puntuaciones que han obtenido los alumnos.



(a) Halle la mediana de las puntuaciones obtenidas. [1]

A los alumnos se les concedió una calificación de entre 1 y 5, dependiendo de la puntuación que hubieran obtenido en el examen. En la siguiente tabla se muestra el número de alumnos que recibieron cada calificación.

Calificación	1	2	3	4	5
Número de alumnos	6	13	26	a	b

(b) Halle una expresión que dé a en función de b. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 7: continuación)

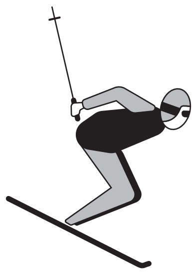
(c) La calificación media de estos alumnos es de $3{,}65$.

(i) Halle el número de alumnos que obtuvieron una calificación de 5.

(ii) Halle la puntuación mínima que se necesita para obtener una calificación de 5. [5]

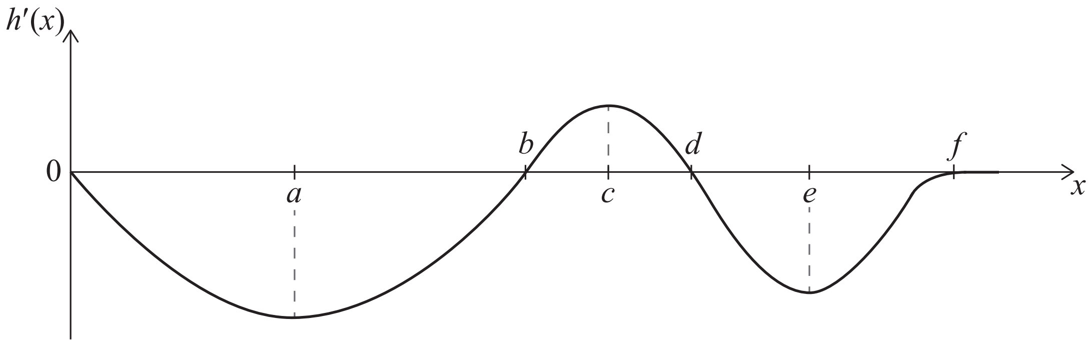
8. [Puntuación máxima: 5]

Juri esquía desde la cima de una colina hasta un punto final que se encuentra al pie de la colina. Toma la ruta más corta, dirigiéndose directamente al punto final (F).



Sea $h(x)$ la altura de la colina respecto a F a una distancia horizontal x del punto de salida, situado en la cima de la colina.

El gráfico de la **derivada** de $h(x)$ se muestra a continuación. Este gráfico de $h'(x)$ tiene máximos y mínimos locales para x igual a a, c y e. El gráfico de $h'(x)$ corta al eje x cuando x es igual a b, d, y f.



(a) (i) Identifique la coordenada x del punto en el cual $|h'(x)|$ alcanza su valor máximo.

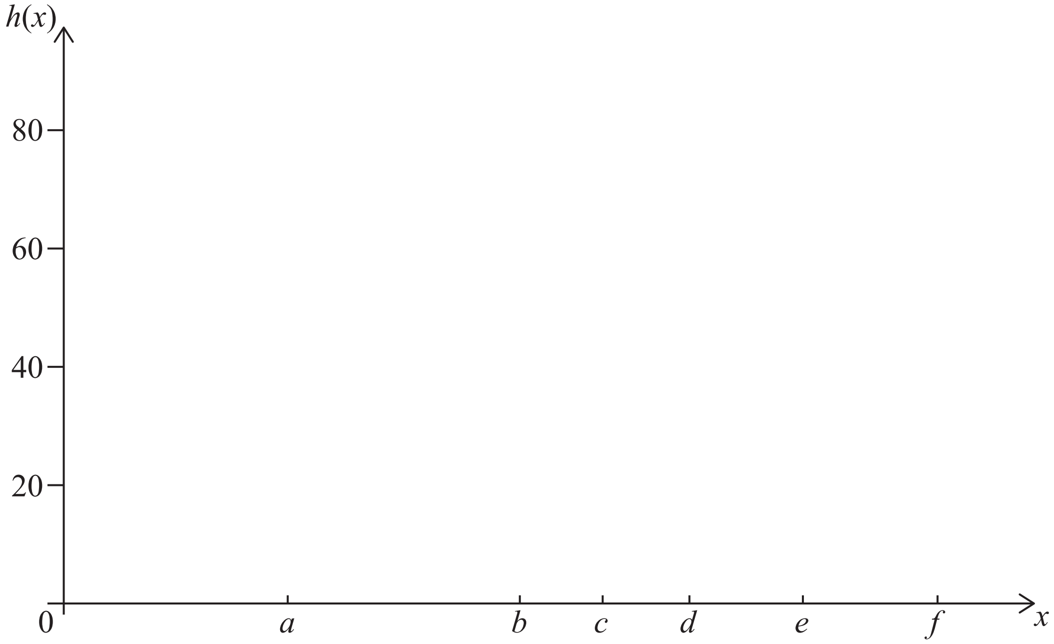
(ii) Interprete este punto en el contexto de la pregunta. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 8: continuación)

Juri sale desde una altura de 60 metros y acaba en F, donde $x = f$.

(b) Dibuje aproximadamente un posible diagrama de la colina en los siguientes ejes de coordenadas. [3]



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

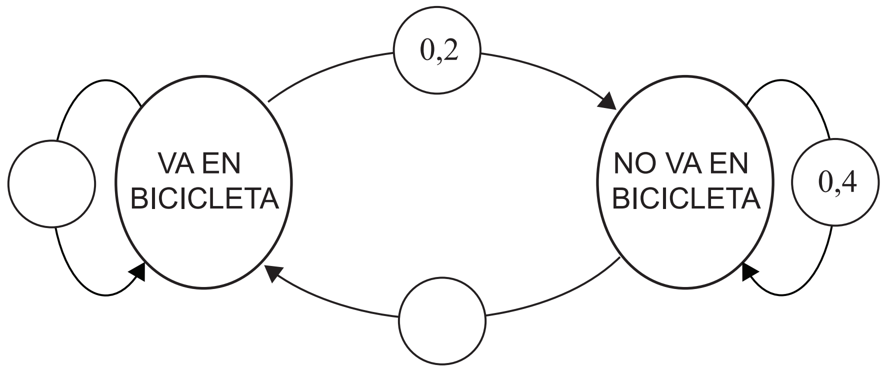
No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

9. [Puntuación máxima: 5]

A Katie le gusta ir en bicicleta al trabajo siempre que puede. Si Katie va en bicicleta al trabajo un día, entonces la probabilidad de que no vaya en bicicleta al trabajo el siguiente día laborable es igual a $0{,}2$. Si Katie no va en bicicleta al trabajo un día, entonces la probabilidad de que no vaya en bicicleta al trabajo el siguiente día laborable es igual a $0{,}4$.

(a) Complete el siguiente diagrama de transición para representar esta información. [2]



Katie trabaja 180 días al año.

(b) Halle la probabilidad de que Katie vaya en bicicleta a trabajar en su último día de trabajo del año. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

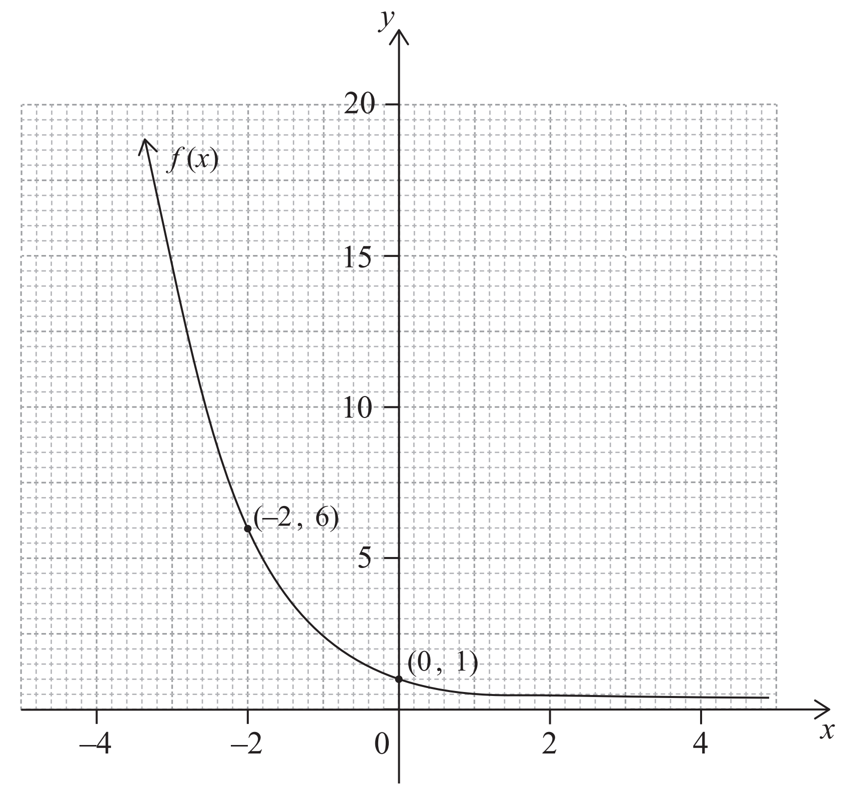
. . . .

. . . .

. . . .

10. [Puntuación máxima: 4]

El gráfico de $y = f(x)$ se muestra en los siguientes ejes de coordenadas. El gráfico pasa por los puntos $(-2,\ 6)$ y $(0,\ 1)$, y tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.



Sea $g(x) = 2f(x-2) + 4$.

(a) Halle $g(0)$. [2]

(b) En esos mismos ejes de coordenadas, dibuje con precisión el gráfico de $y = g(x)$, mostrando todos los cortes con los ejes y todas las asíntotas que haya. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

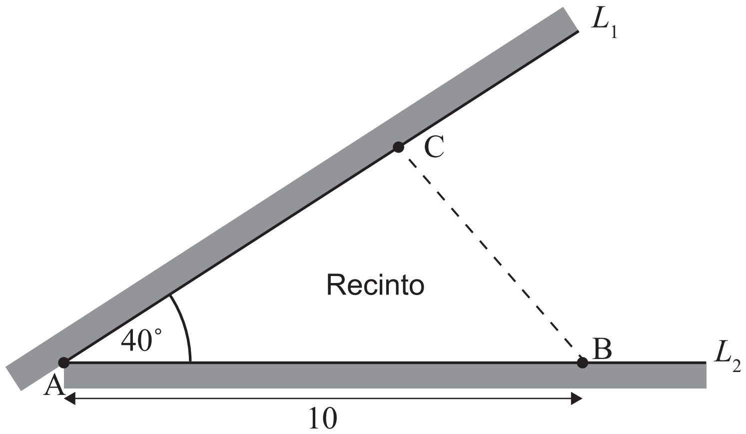
(Pregunta 10: continuación)

11. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra una esquina de un campo que está delimitado por dos paredes, representadas por las rectas L_1 y L_2. Las paredes coinciden en el punto A, formando un ángulo de 40°.

El agricultor Nate tiene $7\,\mathrm{m}$ de valla para construir un recinto triangular donde guardar sus ovejas. Un extremo de la valla se coloca en el punto B, perteneciente a L_2 y situado a $10\,\mathrm{m}$ de A. El otro extremo de la valla se va a colocar en algún punto C perteneciente a L_1, tal y como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



Nate quiere que el recinto ocupe la menor parte posible del campo actual.

Halle el área mínima que puede tener el recinto triangular ABC. [6]

12. [Puntuación máxima: 5]

La siguiente tabla muestra el tiempo (en días) transcurrido desde el 1 de diciembre y el porcentaje de árboles de Navidad que quedaban por vender en una tienda al comienzo de ese día.

Días transcurridos desde el 1 de diciembre (d)	1	3	6	9	12	15	18
Porcentaje de árboles de Navidad que quedan por vender (x)	100	51	29	21	18	16	14

La siguiente tabla muestra los logaritmos neperianos de d y x para esos mismos días, redondeando los valores a 2 lugares decimales.

ln (d)	0	1,10	1,79	2,20	2,48	2,71	2,89
ln (x)	4,61	3,93	3,37	3,04	2,89	2,77	2,64

(a) Utilice los datos de la segunda tabla para hallar el valor de m y el valor de b para la recta de regresión $\ln x = m(\ln d) + b$. [2]

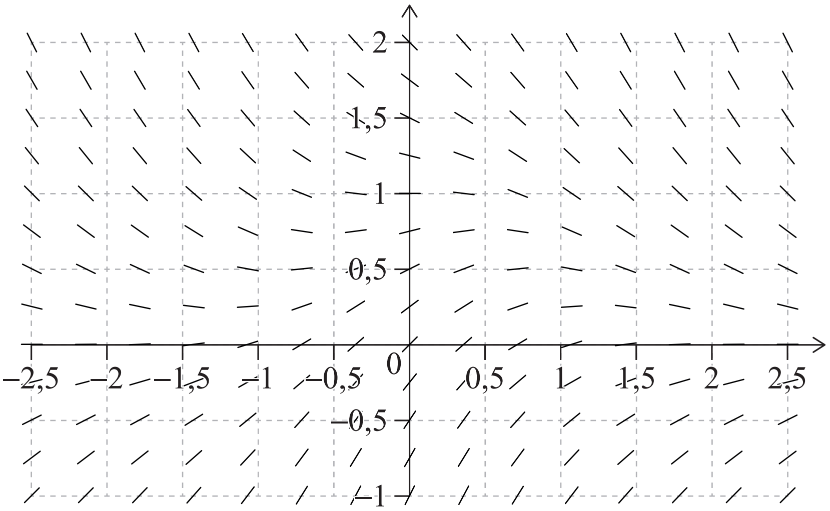
(b) Suponiendo que el modelo que ha hallado en el apartado (a) sigue siendo válido, estime el porcentaje de árboles que quedan por vender cuando $d = 25$. [3]

13. [Puntuación máxima: 7]

El campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} - y$ se muestra en los dos gráficos siguientes.

(a) Calcule el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(0, 1)$. [1]

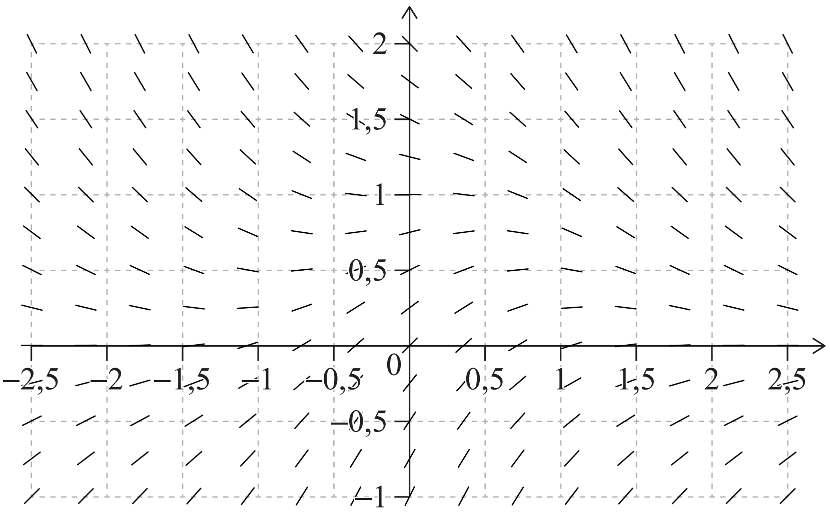
(b) Dibuje aproximadamente, en el primer gráfico, una curva que represente los puntos en los que $\frac{dy}{dx} = 0$. [2]



(c) En el segundo gráfico:

(i) Dibuje aproximadamente la curva solución que pasa por el punto $(0, 0)$.

(ii) Dibuje aproximadamente la curva solución que pasa por el punto $(0, 0{,}75)$. [4]



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 13: continuación)

14. [Puntuación máxima: 7]

En la granja de Paul, las patatas se meten en sacos que llevan el rótulo “$50\,\mathrm{kg}$”. Los pesos de los sacos de patatas siguen una distribución normal con peso medio de $49{,}8\,\mathrm{kg}$ y desviación típica igual a $0{,}9\,\mathrm{kg}$.

(a) Halle la probabilidad de que un saco pese menos de lo que indica el rótulo. [2]

(b) Halle el primer cuartil de los pesos de los sacos de patatas. [2]

Los sacos de patatas se transportan en cajas. En cada caja hay 10 sacos, y los pesos de los sacos de patatas son independientes unos de otros.

(c) Halle la probabilidad de que el peso total de los sacos de patatas que hay en una caja supere los $500\,\mathrm{kg}$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

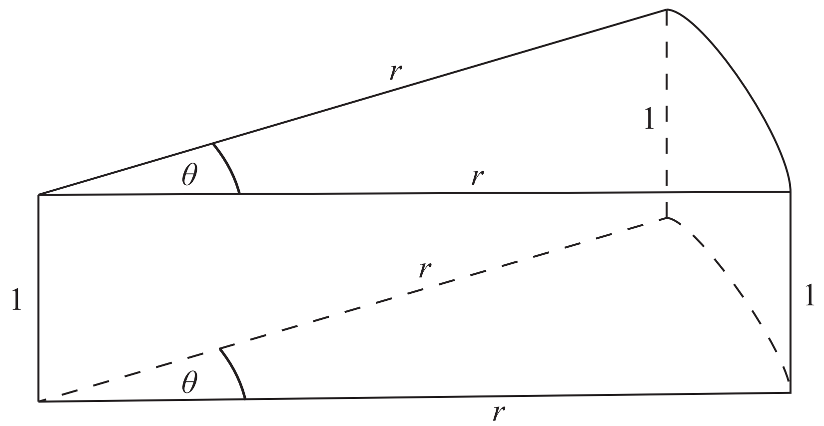
. . . .

. . . .

. . . .

15. [Puntuación máxima: 9]

La siguiente figura muestra una estructura hecha de alambre. La longitud total de alambre es igual a $15\,\text{cm}$. La estructura está compuesta por dos sectores circulares idénticos que son paralelos entre sí. Los sectores circulares subtienden un ángulo de θ radianes y tienen un radio de $r\,\text{cm}$. Están conectados mediante alambres de $1\,\text{cm}$ de longitud y perpendiculares a los sectores circulares. Toda esta información se muestra en el siguiente diagrama.



(a) Muestre que $r = \dfrac{6}{2+\theta}$. [2]

Las caras de la estructura se recubren de papel para delimitar un volumen V.

(b) (i) Halle una expresión que dé V en función de θ.

(ii) Halle la expresión $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}$.

(iii) Resuelva por métodos algebraicos $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$ para hallar el valor de θ que maximiza el volumen V. [7]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

16. [Puntuación máxima: 9]

Un barco (S) se está desplazando a una velocidad constante de $\boldsymbol{v}$ kilómetros por hora, donde

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

En el instante $t = 0$, el barco se encuentra en el punto $\mathrm{A}(300\,,\ 100)$ con respecto al origen O, donde las distancias vienen dadas en kilómetros.

(a) Halle el vector de posición del barco ($\overrightarrow{\mathrm{OS}}$) en el instante t horas. [1]

Hay un faro situado en el punto $(129\,,\ 283)$.

(b) Halle el valor de t para el que el barco estará lo más cerca posible del faro. [6]

Si el barco se acerca a menos de 20 kilómetros del faro, sonará una alarma.

(c) Indique si sonará la alarma. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

17. [Puntuación máxima: 7]

Las paredes de un cuenco se forman rotando la curva $y = 6\ln x$, $0 \le y \le 9$, alrededor del eje y, donde x e y están en centímetros. El cuenco contiene agua hasta una altura de $h\,\mathrm{cm}$.

(a) Muestre que el volumen de agua (V) expresado en función de h es $V = 3\pi\left(e^{\frac{h}{3}} - 1\right)$. [5]

(b) A partir de lo anterior, halle la capacidad máxima del cuenco, en cm^3. [2]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.