Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : applications et interprétation
Niveau supérieur
Épreuve 1

Lundi 1 novembre 2021 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions.
- Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

8821 – 7216

25 pages

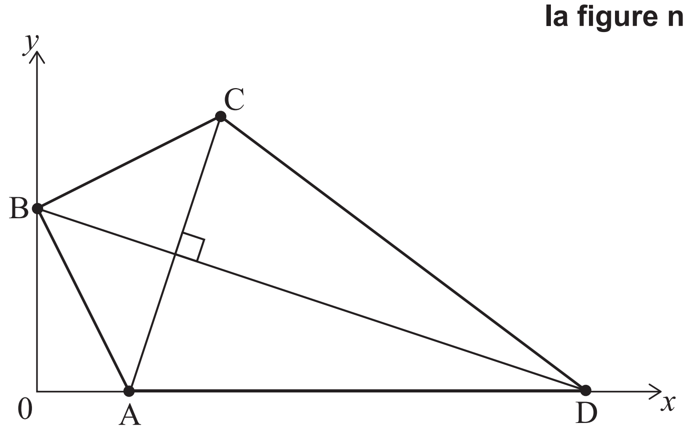
Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 6]

Dilara conçoit un cerf-volant ABCD sur un système d'axes dans lequel une unité représente $10\,\text{cm}$.

Les coordonnées de A, B et C sont respectivement $(2\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 4)$ et $(4\ ;\ 6)$. Le point D se situe sur l'axe des abscisses. $[AC]$ est perpendiculaire à $[BD]$. Ces informations sont montrées dans le diagramme suivant.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez la pente de la droite passant par A et C. [2]

(b) Écrivez la pente de la droite passant par B et D. [1]

(c) Trouvez l'équation de la droite passant par B et D. Donnez votre réponse sous la forme $ax + by + d = 0$, où a, b et d sont des entiers. [2]

(d) Écrivez l'abscisse du point D. [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

2. [Note maximale : 5]

Des inspecteurs enquêtent sur les émissions de dioxyde de carbone d'une centrale électrique. Soit R, le taux, en tonnes par heure, auquel le dioxyde de carbone est émis et t, le temps, en heures, depuis le début de l'inspection.

Lorsqu'on représente graphiquement R en fonction de t, la quantité totale de dioxyde de carbone émise est donnée par l'aire entre la courbe et l'axe horizontal t.

Le taux, R, est mesuré sur une période de deux heures. Les résultats sont montrés dans le tableau suivant.

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
R	30	50	60	40	20	50

(a) Utilisez la formule des trapèzes avec un intervalle de largeur $0{,}4$ pour estimer la quantité totale de dioxyde de carbone émise durant ces deux heures. [3]

La quantité réelle de dioxyde de carbone émise durant ces deux heures a été de 72 tonnes.

(b) Trouvez le pourcentage d'erreur de l'estimation trouvée dans la partie (a). [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Note maximale : 7]

Soit la fonction $h(x)$ qui représente la hauteur, en centimètres, d'une boîte de métal cylindrique dont le diamètre mesure $x\,\text{cm}$.

$$h(x) = \frac{640}{x^2} + 0{,}5 \text{ pour } 4 \le x \le 14.$$

(a) Trouvez l'image de h. [3]

La fonction h^{-1} est la fonction réciproque de h.

(b) (i) Trouvez $h^{-1}(10)$.

(ii) Dans le contexte de la question, interprétez votre réponse de la partie (b)(i).

(iii) Écrivez l'image de h^{-1}. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

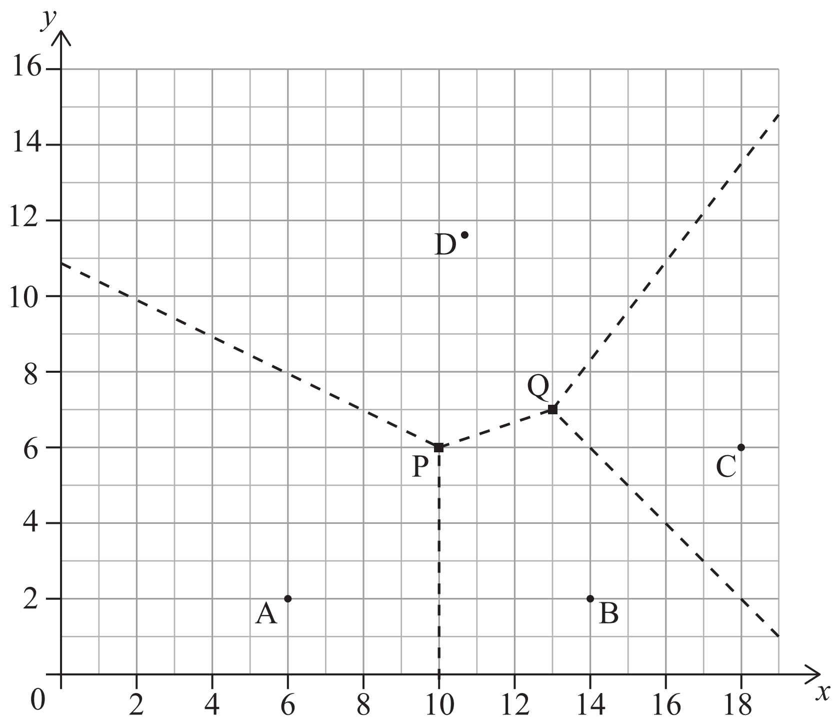
. . . .

4. [Note maximale : 6]

Il y a quatre postes de surveillance utilisés par les gardes forestiers chargés de la prévention des incendies dans une forêt nationale.

Dans le diagramme de Voronoï suivant, les coordonnées des postes de surveillance sont $A(6\ ;\ 2)$, $B(14\ ;\ 2)$, $C(18\ ;\ 6)$ et $D(10{,}8\ ;\ 11{,}6)$, où les distances sont mesurées en kilomètres.

Les lignes pointillées représentent les frontières des régions patrouillées par le garde forestier de chaque poste de surveillance. Les frontières se rencontrent aux points $P(10\ ;\ 6)$ et $Q(13\ ;\ 7)$.



Afin de réduire les aires des régions patrouillées par les gardes forestiers, un nouveau poste de surveillance sera construit à l'intérieur du quadrilatère ABCD. Le nouveau poste de surveillance sera situé de façon à ce qu'il soit le plus loin possible du poste de surveillance existant le plus proche.

(a) Montrez que le nouveau poste de surveillance doit être construit au point P. [3]

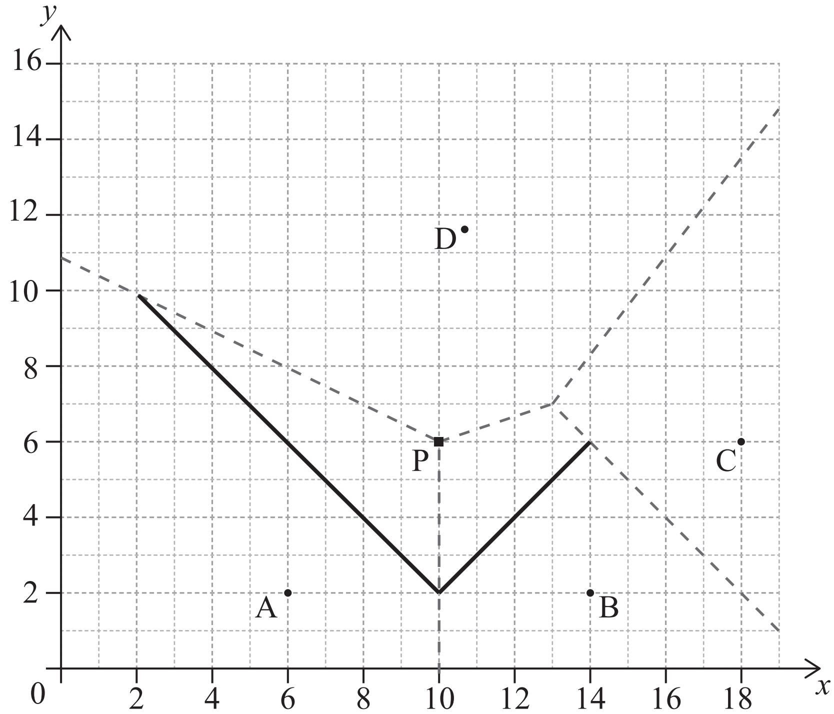
Le diagramme de Voronoï doit être mis à jour afin d'y inclure la région autour du nouveau poste de surveillance en P. Les arêtes définies par les médiatrices de [AP] et [BP] ont été ajoutées au diagramme suivant.

(b) (i) Écrivez l'équation de la médiatrice de [PC].

(ii) À partir de là, dessinez les frontières manquantes de la région autour de P sur le diagramme suivant. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)



5. [Note maximale : 9]

Dans cette question, donnez toutes les réponses avec une précision de deux décimales.

Raul et Rosy veulent acheter une nouvelle maison et doivent contracter un prêt de $170\,000$ dollars australiens (AUD) dans une banque. Le prêt est d'une durée de 30 ans et le taux d'intérêt annuel pour le prêt est de $3{,}8\,\%$, composé mensuellement. Ils rembourseront le prêt en effectuant des paiements mensuels fixes à la fin de chaque mois.

(a) Trouvez le montant qu'ils rembourseront chaque mois à la banque. [3]

(b) (i) Trouvez le montant que Raul et Rosy devront encore à la banque à la fin des 10 premières années.

(ii) En utilisant vos réponses des parties (a) et (b)(i), calculez le montant total des intérêts qu'ils auront payé au cours des 10 premières années. [6]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Note maximale : 5]

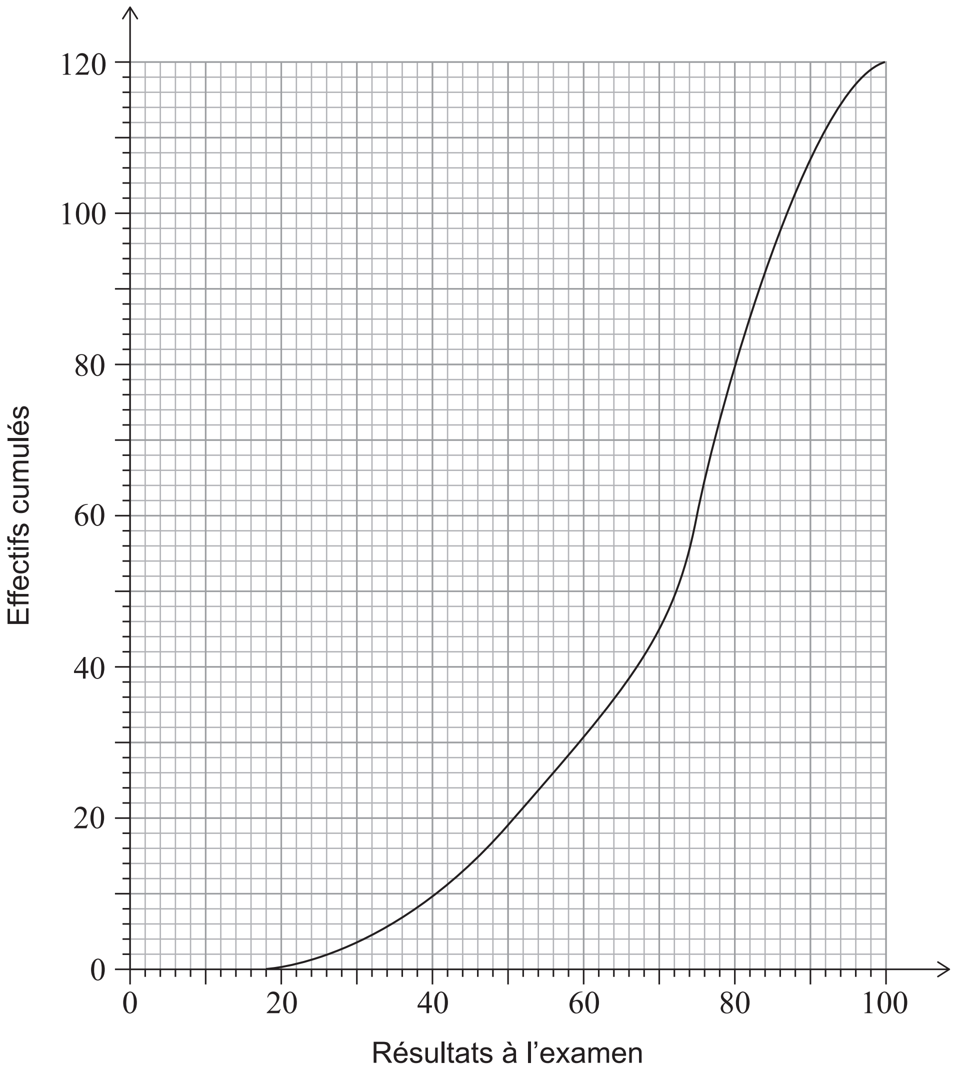
Une suite géométrique infinie, dont les termes sont notés u_n, est telle que $u_1 = 2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 10$.

(a) Trouvez la raison, r, de cette suite. [2]

(b) Trouvez la plus petite valeur de n telle que $u_n < \frac{1}{2}$. [3]

7. [Note maximale : 8]

Un groupe de 120 élèves ont passé un examen d'histoire. La courbe des effectifs cumulés montre les résultats obtenus par ces élèves.



(a) Trouvez la médiane des résultats obtenus. [1]

Les élèves reçoivent une note de 1 à 5, selon le résultat obtenu à l'examen. Le nombre d'élèves ayant reçu chaque note est montré dans le tableau suivant.

Note	1	2	3	4	5
Nombre d'élèves	6	13	26	a	b

(b) Trouvez une expression pour a en fonction de b. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(c) La note moyenne pour ces élèves est de $3,65$.

(i) Trouvez le nombre d’élèves ayant reçu une note de 5.

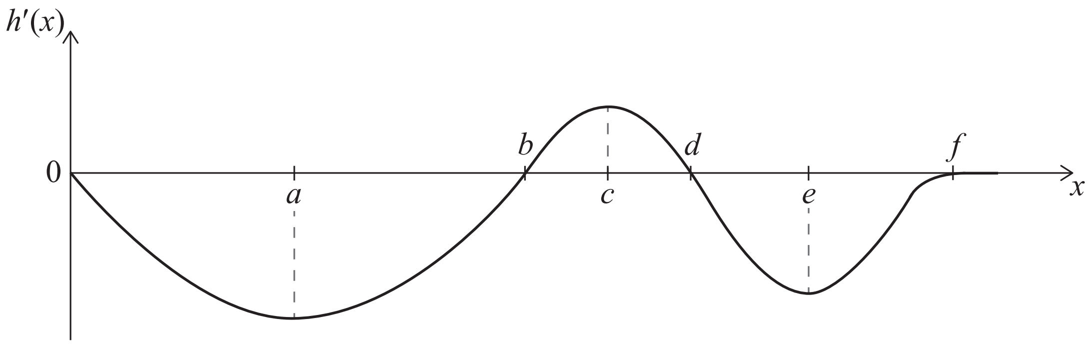
(ii) Trouvez le résultat minimal requis pour obtenir une note de 5. [5]

8. [Note maximale : 5]

Juri skie du haut d'une colline jusqu'à un point d'arrivée en bas de la colline. Elle emprunte le chemin le plus court, se dirigeant directement vers le point d'arrivée (F).

Soit $h(x)$ la hauteur de la colline au-dessus de F à une distance horizontale x du point de départ au sommet de la colline.

La représentation graphique de la **dérivée** de $h(x)$ est montrée ci-dessous.
La représentation graphique de $h'(x)$ a des minimums et maximums relatifs lorsque x est égal à a, c et e. La représentation graphique de $h'(x)$ coupe l'axe des abscisses lorsque x est égal à b, d, et f.



(a) (i) Identifiez la valeur de x du point où $|h'(x)|$ atteint sa valeur maximale.

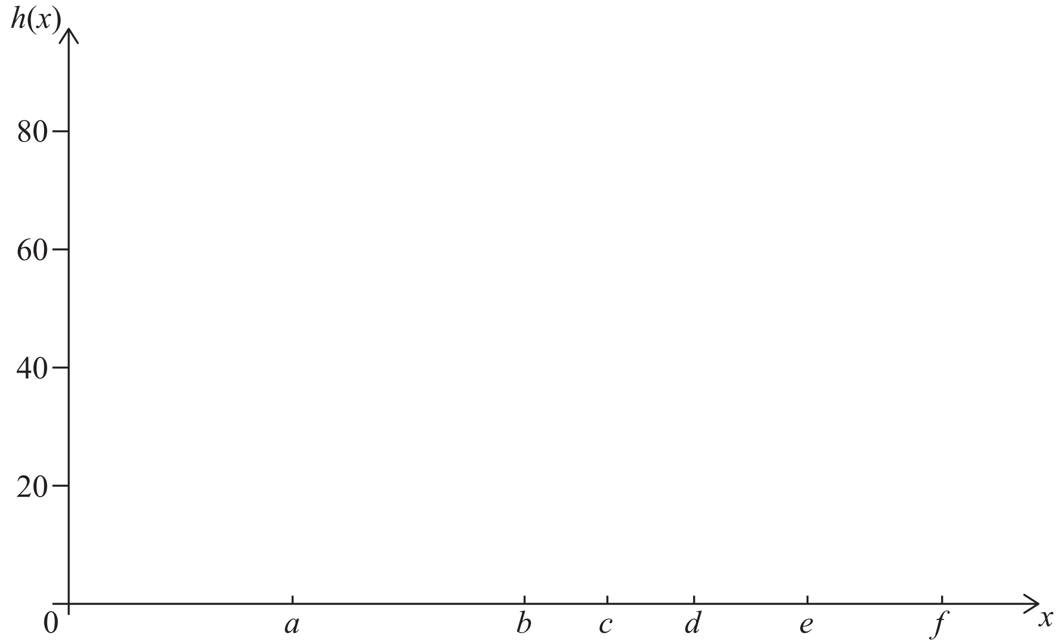
(ii) Interprétez ce point dans le contexte donné. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 8)

Juri part d'une hauteur de 60 mètres et finit au point F, où $x = f$.

(b) Esquissez un diagramme possible de la colline sur le système d'axes suivant. [3]



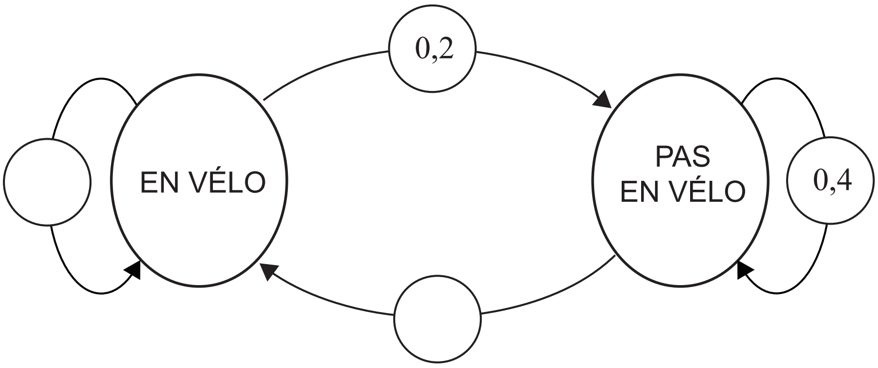
Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

9. [Note maximale : 5]

Katie aime se rendre en vélo au travail aussi souvent que possible. Si Katie se rend en vélo au travail un jour donné, elle a alors une probabilité de $0,2$ de ne pas se rendre en vélo au travail le jour suivant. Si elle ne se rend pas en vélo au travail un jour donné, elle a alors une probabilité de $0,4$ de ne pas se rendre en vélo au travail le jour suivant.

(a) Complétez le diagramme de transition suivant pour représenter ces informations. [2]



Katie travaille 180 jours au cours d'une année.

(b) Trouvez la probabilité que Katie se rende en vélo au travail lors de son dernier jour de travail de l'année. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

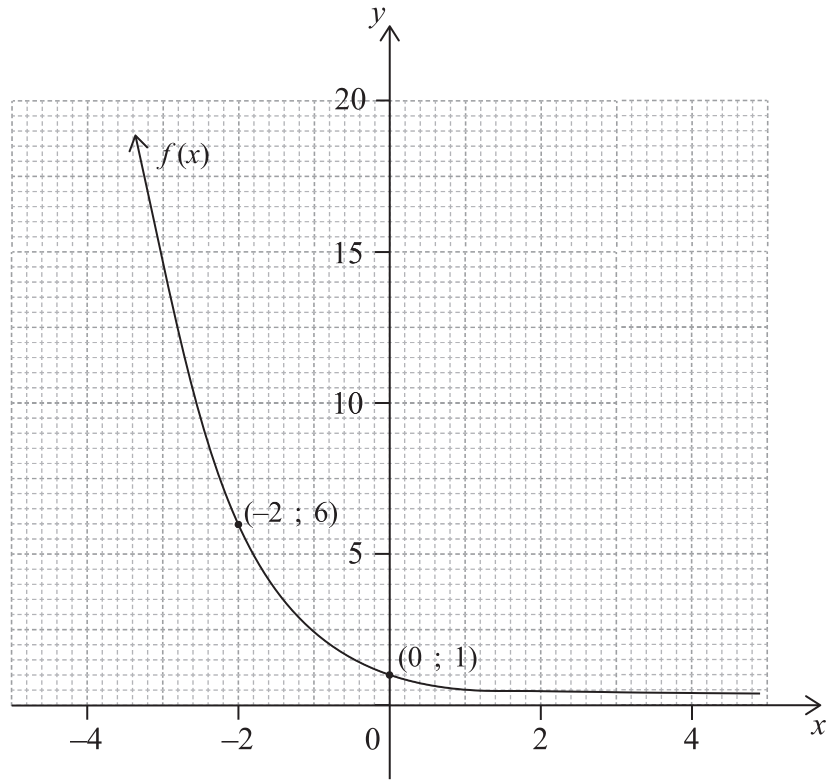
. . . .

. . . .

. . . .

10. [Note maximale : 4]

La représentation graphique de $y = f(x)$ est donnée dans le système d'axes suivant. La représentation graphique passe par les points $(-2\ ;\ 6)$ et $(0\ ;\ 1)$, et possède une asymptote horizontale en $y = 0$.



Soit $g(x) = 2f(x-2)+4$.

(a) Trouvez $g(0)$. [2]

(b) Sur le même système d'axes, dessinez la représentation graphique de $y = g(x)$, en montrant tout point d'intersection avec les axes et toute asymptote. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

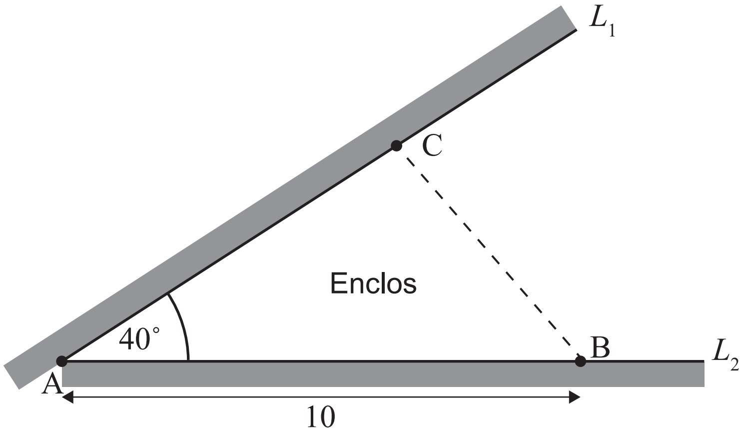
(Suite de la question 10)

11. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un coin d'un champ délimité par deux murs définis par les droites L_1 et L_2. Les murs se rencontrent en un point A, faisant un angle de 40°.

Le fermier Nate possède $7\,\mathrm{m}$ de clôture pour construire un enclos triangulaire pour ses brebis. Une des extrémités de la clôture se situe en un point B sur L_2, à $10\,\mathrm{m}$ de A. L'autre extrémité de la clôture sera située en un point C sur L_1, tel que montré sur le diagramme.

la figure n'est pas à l'échelle



Il souhaite que l'enclos occupe le moins d'espace possible dans le champ actuel.

Trouvez l'aire minimale possible de l'enclos triangulaire ABC. [6]

12. [Note maximale : 5]

Le tableau suivant montre le temps, en jours, à compter du 1^er^ décembre et le pourcentage de sapins de Noël en stock dans un magasin au début de ce jour.

Jours à compter du 1er décembre (d)	1	3	6	9	12	15	18
Pourcentage de sapins de Noël en stock (x)	100	51	29	21	18	16	14

Le tableau suivant montre le logarithme naturel de d et de x lors de ces jours à deux décimales près.

ln (d)	0	1,10	1,79	2,20	2,48	2,71	2,89
ln (x)	4,61	3,93	3,37	3,04	2,89	2,77	2,64

(a) Utilisez les données du deuxième tableau pour trouver la valeur de m et la valeur de b pour la droite de régression, $\ln x = m(\ln d) + b$. [2]

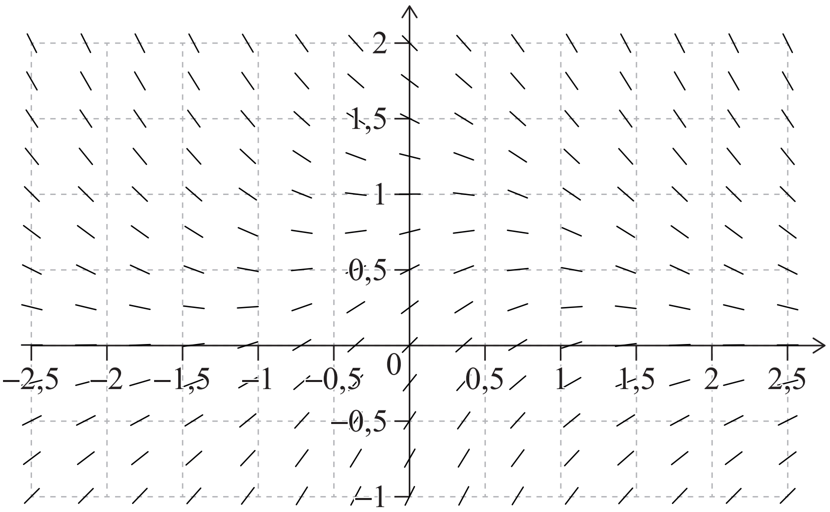
(b) En supposant que le modèle trouvé dans la partie (a) demeure valide, estimez le pourcentage de sapins en stock lorsque $d = 25$. [3]

13. [Note maximale : 7]

Le champ de vecteurs pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x^2} - y$ est montré dans les deux représentations graphiques suivantes.

(a) Calculez la valeur de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ au point $(0\ ;\ 1)$. [1]

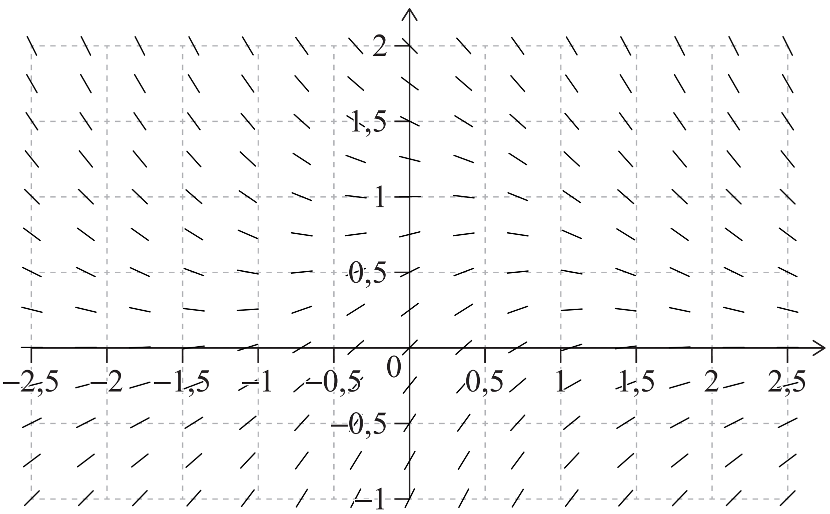
(b) Esquissez, sur la première représentation graphique, une courbe qui représente les points où $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. [2]



(c) Sur la deuxième représentation graphique,

(i) esquissez la courbe correspondant à la solution particulière passant par le point $(0\ ;\ 0)$.

(ii) esquissez la courbe correspondant à la solution particulière passant par le point $(0\ ;\ 0{,}75)$. [4]



(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 13)

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

14. [Note maximale : 7]

Dans la ferme de Paul, les pommes de terre sont emballées dans des sacs étiquetés $50\,\text{kg}$. Les poids des sacs de pommes de terre peuvent être modélisés par une distribution normale dont le poids moyen est de $49{,}8\,\text{kg}$ et l'écart type est de $0{,}9\,\text{kg}$.

(a) Trouvez la probabilité qu'un sac soit en dessous du poids étiqueté. [2]

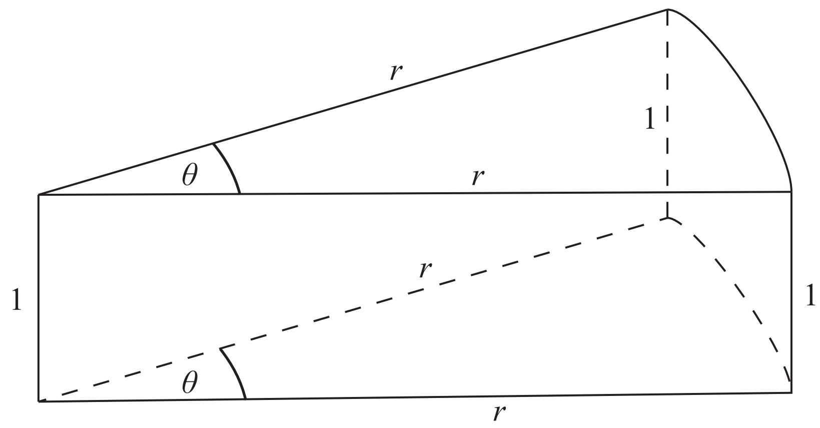
(b) Trouvez le premier quartile des poids des sacs de pommes de terre. [2]

Les sacs de pommes de terre sont transportés dans des caisses. Il y a 10 sacs dans chaque caisse et les poids des sacs de pommes de terre sont indépendants les uns des autres.

(c) Trouvez la probabilité que le poids total des sacs de pommes de terre dans une caisse soit supérieur à $500\,\text{kg}$. [3]

15. [Note maximale : 9]

Le diagramme suivant montre un cadre fabriqué en fil de fer. La longueur totale du fil de fer est égale à $15\,\mathrm{cm}$. Le cadre est composé de deux secteurs identiques d'un cercle qui sont parallèles entre eux. Les secteurs ont un angle de θ radians et un rayon de $r\,\mathrm{cm}$. Ils sont reliés par des fils de fer de $1\,\mathrm{cm}$ de longueur, perpendiculaires aux secteurs. Ceci est montré dans le diagramme ci-dessous.



(a) Montrez que $r = \dfrac{6}{2+\theta}$. [2]

Les faces du cadre sont recouvertes de papier pour délimiter un volume, V.

(b) (i) Trouvez une expression pour V en fonction de θ.

(ii) Trouvez l'expression $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}$.

(iii) Résolvez algébriquement $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$ pour trouver la valeur de θ qui rendra le volume V maximal. [7]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

16. [Note maximale : 9]

Un navire S se déplace avec un vecteur-vitesse constant, $\boldsymbol{v}$, mesuré en kilomètres à l'heure, où

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Au temps $t = 0$, le navire se trouve en un point $\mathrm{A}(300\ ;\ 100)$ par rapport à une origine O, où les distances sont mesurées en kilomètres.

(a) Trouvez le vecteur-position $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ du navire au temps t heures. [1]

Un phare est situé en un point $(129\ ;\ 283)$.

(b) Trouvez la valeur de t lorsque le navire sera le plus près du phare. [6]

Une alarme retentira si le navire se trouve à moins de 20 kilomètres du phare.

(c) Indiquez si l'alarme retentira. Donnez une raison justifiant votre réponse. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

17. [Note maximale : 7]

Les côtés d’un bol sont formés en faisant tourner la courbe $y = 6\ln x$, $0 \le y \le 9$, autour de l’axe des ordonnées, où x et y sont mesurés en centimètres. Le bol est rempli d’eau jusqu’à une hauteur de $h\,\mathrm{cm}$.

(a) Montrez que le volume d’eau, V, en fonction de h est $V = 3\pi\left(e^{\frac{h}{3}} - 1\right)$. [5]

(b) À partir de là, trouvez la capacité maximale du bol en cm^3. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.