Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

Martes 9 de noviembre de 2021 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8821 – 7123

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 25]

En esta pregunta tendrá que explorar algunas de las propiedades de dos funciones especiales f y g y su relación con las funciones trigonométricas seno y coseno.

Las funciones f y g se definen como $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}$ y $g(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}$, donde $z\in\mathbb{C}$.

Considere t y u, con $t,\ u\in\mathbb{R}$.

(a) Verifique que $u=f(t)$ satisface la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=u$. [2]

(b) Muestre que $\left(f(t)\right)^2+\left(g(t)\right)^2=f(2t)$. [3]

(c) Utilizando $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}=\cos u+\mathrm{i}\operatorname{sen} u$, halle una expresión en función de $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ para:

(i) $f(\mathrm{i}u)$ [3]

(ii) $g(\mathrm{i}u)$ [2]

(d) A partir de lo anterior, halle y simplifique una expresión para $\left(f(\mathrm{i}u)\right)^2+\left(g(\mathrm{i}u)\right)^2$. [2]

(e) Muestre que $\left(f(t)\right)^2-\left(g(t)\right)^2=\left(f(\mathrm{i}u)\right)^2-\left(g(\mathrm{i}u)\right)^2$. [4]

Las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ se denominan funciones circulares, ya que las coordenadas generales $(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)$ definen puntos pertenecientes al círculo de radio unidad, cuya ecuación es $x^2+y^2=1$.

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denominan funciones hiperbólicas, ya que las coordenadas generales $\left(f(\theta),\ g(\theta)\right)$ definen puntos pertenecientes a una curva denominada hipérbola, cuya ecuación es $x^2-y^2=1$. Esta hipérbola tiene dos asíntotas.

(f) Dibuje aproximadamente el gráfico de $x^2-y^2=1$, indicando las coordenadas de todas las intersecciones con los ejes que haya y la ecuación de cada una de las asíntotas. [4]

La hipérbola que tiene por ecuación $x^2-y^2=1$ se puede rotar hasta hacerla coincidir con la curva que viene dada por $xy=k,\ k\in\mathbb{R}$.

(g) Halle los posibles valores de k. [5]

2. [Puntuación máxima: 30]

En esta pregunta tendrá que explorar las estrategias necesarias para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y \text{ y } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ax + y,$$

donde $x, y, t \in \mathbb{R}^+$ y a es un parámetro.

Considere primero el caso en el que $a = 0$.

(a) (i) Resolviendo la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y$, muestre que $y = A\mathrm{e}^t$, donde A es una constante. [3]

(ii) Muestre que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = -A\mathrm{e}^t$. [1]

(iii) Resuelva la ecuación diferencial del subapartado (a)(ii) para hallar x en función de t. [4]

Considere ahora el caso en el que $a = -1$.

(b) (i) Derivando $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y$ con respecto a t, muestre que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. [3]

(ii) Realizando la sustitución $Y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, muestre que $Y = B\mathrm{e}^{2t}$, donde B es una constante. [3]

(iii) A partir de lo anterior, halle y en función de t. [2]

(iv) A partir de lo anterior, muestre que $x = -\frac{B}{2}\mathrm{e}^{2t} + C$, donde C es una constante. [3]

Considere ahora el caso en el que $a = -4$.

(c) (i) Muestre que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3y = 0$. [3]

A partir de los casos anteriores, podríamos conjeturar que una solución de esta ecuación diferencial es $y = F\mathrm{e}^{\lambda t}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y F es una constante.

(ii) Halle los dos valores de λ que satisfacen la relación $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3y = 0$. [4]

Sean λ_1 y λ_2 los dos valores que ha hallado en el subapartado (c)(ii).

(iii) Verifique que $y = F\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + G\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ es una solución de la ecuación diferencial del subapartado (c)(i), donde G es una constante. [4]

Fuentes: