Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

Mardi 9 novembre 2021 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[55 points]**.

8821 – 7118

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 25]

Dans cette question, vous explorerez certaines propriétés des fonctions spéciales f et g, ainsi que leur relation avec les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

Les fonctions f et g sont définies par $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}$ et $g(z)=\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}$, où $z\in\mathbb{C}$.

Considérez t et u, tel que $t,\ u\in\mathbb{R}$.

(a) Vérifiez que $u=f(t)$ satisfait l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=u$. [2]

(b) Montrez que $(f(t))^2+(g(t))^2=f(2t)$. [3]

(c) En utilisant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}=\cos u+\mathrm{i}\sin u$, trouvez des expressions, en fonction de $\sin u$ et $\cos u$, pour

(i) $f(\mathrm{i}u)$; [3]

(ii) $g(\mathrm{i}u)$. [2]

(d) À partir de là, trouvez et simplifiez, une expression pour $(f(\mathrm{i}u))^2+(g(\mathrm{i}u))^2$. [2]

(e) Montrez que $(f(t))^2-(g(t))^2=(f(\mathrm{i}u))^2-(g(\mathrm{i}u))^2$. [4]

Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont aussi connues sous le nom de fonctions circulaires, où le point général $(\cos\theta;\ \sin\theta)$ définit des points sur le cercle unitaire d'équation $x^2+y^2=1$.

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont connues sous le nom de fonctions hyperboliques, où le point général $(f(\theta);\ g(\theta))$ définit des points sur une courbe appelée une hyperbole d'équation $x^2-y^2=1$. Cette hyperbole a deux asymptotes.

(f) Esquissez la représentation graphique de $x^2-y^2=1$, en indiquant les coordonnées de tout point d'intersection avec les axes et l'équation de chaque asymptote. [4]

L'hyperbole d'équation $x^2-y^2=1$ peut être tournée afin de coïncider avec la courbe définie par $xy=k$, $k\in\mathbb{R}$.

(g) Trouvez les valeurs possibles de k. [5]

2. [Note maximale : 30]

Dans cette question, vous explorerez les stratégies nécessaires pour résoudre un système d'équations différentielles linéaires.

Considérez le système d'équations différentielles linéaires de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = x - y \text{ et } \frac{dy}{dt} = ax + y,$$

où $x, y, t \in \mathbb{R}^+$ et a est un paramètre.

Considérez d'abord le cas où $a = 0$.

(a) (i) En résolvant l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = y$, montrez que $y = Ae^t$, où A est une constante. [3]

(ii) Montrez que $\frac{dx}{dt} - x = -Ae^t$. [1]

(iii) Résolvez l'équation différentielle de la partie (a)(ii) pour trouver x comme une fonction de t. [4]

Considérez maintenant le cas où $a = -1$.

(b) (i) En trouvant la dérivée $\frac{dy}{dt} = -x + y$ par rapport à t, montrez que $\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt}$. [3]

(ii) En substituant $Y = \frac{dy}{dt}$, montrez que $Y = Be^{2t}$, où B est une constante. [3]

(iii) À partir de là, trouvez y comme une fonction de t. [2]

(iv) À partir de là, montrez que $x = -\frac{B}{2}e^{2t} + C$, où C est une constante. [3]

Considérez maintenant le cas où $a = -4$.

(c) (i) Montrez que $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$. [3]

Nous pourrions déduire des cas précédents qu'une solution de cette équation différentielle est $y = Fe^{\lambda t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et F est une constante.

(ii) Trouvez les deux valeurs de λ qui satisfont $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$. [4]

Soit λ_1 et λ_2 les deux valeurs trouvées dans la partie (c)(ii).

(iii) Vérifiez que $y = Fe^{\lambda_1 t} + Ge^{\lambda_2 t}$ est une solution de l'équation différentielle en (c)(i), où G est une constante. [4]

Références :