Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Medio
Prueba 2

Martes 2 de noviembre de 2021 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

8821 – 7125

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

En la academia de música de Lucy, ocho alumnos se presentaron al examen para el diploma de piano y obtuvieron puntuaciones sobre un máximo de 150 puntos. Para tener una referencia, Lucy decidió anotar el número promedio de horas por semana que cada alumno dijo haber practicado durante las semanas previas al examen. Estos resultados se resumen en la siguiente tabla.

Promedio de horas de práctica a la semana (h)	28	13	45	33	17	29	39	36
Puntuación obtenida en el diploma (D)	115	82	120	116	79	101	110	121

(a) Halle el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r) para estos datos. [2]

(b) La relación que existe entre estas variables se puede modelizar mediante la ecuación de regresión $D = ah + b$. Escriba el valor de a y el valor de b. [1]

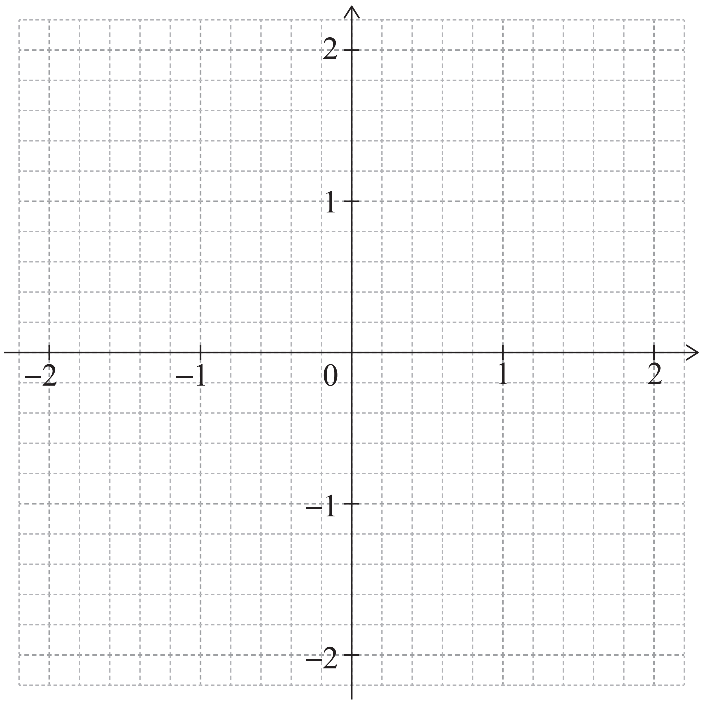
(c) Uno de estos ocho alumnos quedó defraudado con el resultado obtenido y se arrepintió de no haber practicado más. Basándose en los datos del enunciado, determine cómo cabe esperar que hubiera cambiado su puntuación si hubiera practicado cinco horas más por semana. [2]

2. [Puntuación máxima: 5]

Considere la función $f(x) = e^{-x^2} - 0{,}5$, para $-2 \le x \le 2$.

(a) Halle los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. [2]

(b) En la siguiente cuadrícula, dibuje aproximadamente el gráfico de f. [3]



3. [Puntuación máxima: 5]

Considere el triángulo ABC, donde $\mathrm{AC} = 12$, $\mathrm{CB} = 7$ y $\mathrm{B\hat{A}C} = 25^{\circ}$.

Halle el menor perímetro posible del triángulo ABC.

4. [Puntuación máxima: 7]

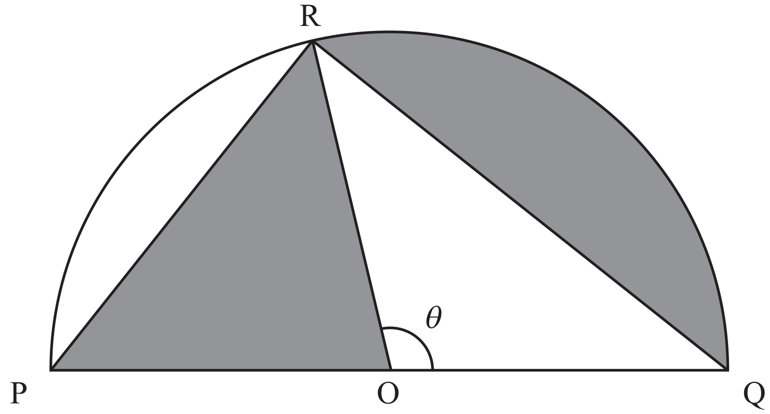
Hay una fábrica donde se producen lámparas. Se sabe que la probabilidad de que una lámpara salga defectuosa es igual a $0{,}05$. Se analiza una muestra aleatoria compuesta por 30 lámparas.

(a) Halle la probabilidad de que en la muestra haya al menos una lámpara defectuosa. [3]

(b) Sabiendo que en la muestra hay al menos una lámpara defectuosa, halle la probabilidad de que haya como mucho dos lámparas defectuosas. [4]

5. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra un semicírculo de centro O y radio r. Los puntos P, Q y R pertenecen a la circunferencia del círculo, de modo tal que $\mathrm{PQ} = 2r$ y $\mathrm{R\hat{O}Q} = \theta$, donde $0 < \theta < \pi$.



(a) Sabiendo que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales, muestre que $\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$. [5]

(b) A partir de lo anterior, determine el valor de θ. [1]

6. [Puntuación máxima: 9]

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^r$.

(a) Halle el primer término de la progresión (u_1). [2]

(b) Halle S_∞. [3]

(c) Halle el valor más pequeño de n para el que se cumple que $S_\infty - S_n < 0{,}001$. [4]

No escriba soluciones en esta página.

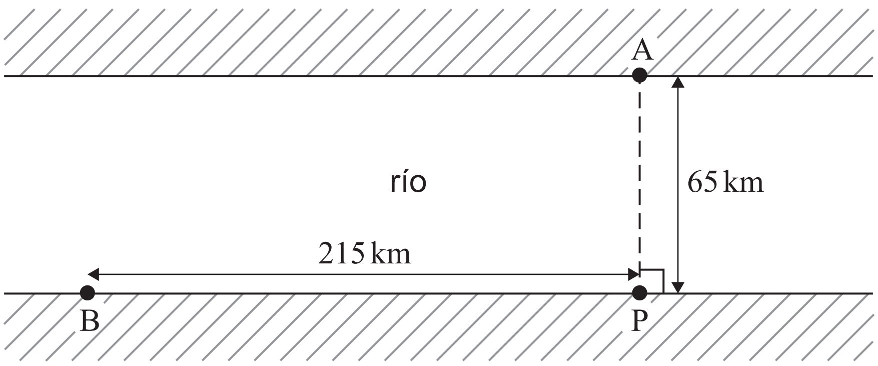
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 14]

Los puntos A y P están situados en las orillas opuestas de un río, de modo tal que AP es la menor distancia que hay que recorrer para atravesar el río. El punto B representa el centro de una ciudad que está situada a la orilla del río. $\mathrm{PB} = 215\,\mathrm{km}$, $\mathrm{AP} = 65\,\mathrm{km}$ y $\mathrm{A\hat{P}B} = 90^{\circ}$.

La siguiente figura muestra toda esta información.



Un barco se desplaza a una velocidad promedio de $42\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Un autobús se desplaza por la carretera recta que va de P a B a una velocidad promedio de $84\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

(a) Halle el tiempo (en horas) que se tarda en ir de A a B sabiendo que:

(i) De A a P se va en barco y de P a B se va en autobús.

(ii) El barco va directamente a B. [4]

Hay un punto D, situado en la carretera que va de P a B, tal que $\mathrm{BD} = x\,\mathrm{km}$. El barco va de A a D, y el autobús va de D a B.

(b) (i) Halle una expresión en función de x que dé el tiempo T que se tarda en ir de A a B pasando por D.

(ii) Halle el valor de x para el cual T es mínimo.

(iii) Escriba el valor mínimo de T. [6]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

(c) Para hacer una excursión hay que alquilar el barco y el autobús. El costo de alquilar el barco es de 200 dólares estadounidenses (USD) por hora y el costo de alquilar el autobús es de $\text{USD } 150$ por hora.

(i) Halle el nuevo valor de x para el cual el costo total (C) del viaje de A a B pasando por D es mínimo.

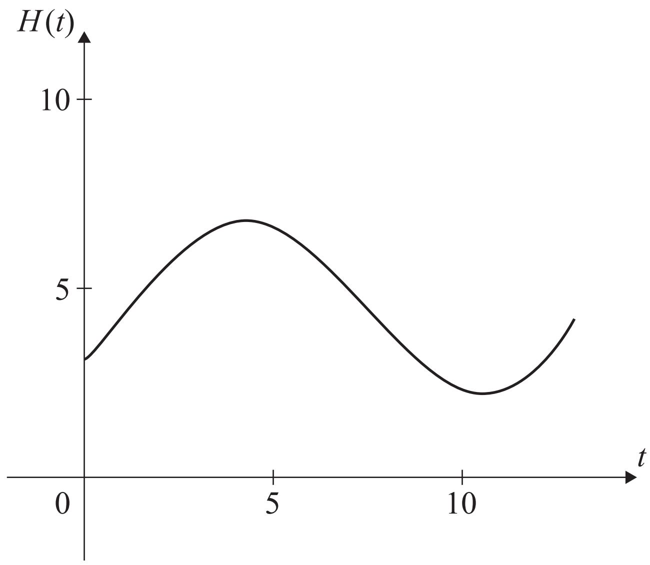
(ii) Escriba el costo total mínimo de este viaje. [4]

No escriba soluciones en esta página.

8. [Puntuación máxima: 13]

En el puerto de Dungeness, la altura del agua (en metros) se puede modelizar mediante la función $H(t) = a\,\mathrm{sen}\big(b(t-c)\big) + d$, donde t es el número de horas transcurridas desde la medianoche, y a, b, c y d son constantes, con $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

En el siguiente gráfico se representa la altura del agua a lo largo de 13 horas, empezando a medianoche.



La primera marea alta sucede a las 04.30 y la siguiente marea alta sucede 12 horas más tarde. A lo largo del día, la altura del agua va fluctuando entre los $2{,}2\,\mathrm{m}$ y los $6{,}8\,\mathrm{m}$.

Todas las alturas se dan redondeando a una cifra decimal.

(a) Muestre que $b = \frac{\pi}{6}$. [1]

(b) Halle el valor de a. [2]

(c) Halle el valor de d. [2]

(d) Halle el menor valor posible de c. [3]

(e) Halle cuál será la altura del agua a las 12.00. [2]

(f) Determine durante cuántas horas, a lo largo de un período de 24 horas, la altura de la marea supera los 5 metros. [3]

No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 16]

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a σ.

(a) Halle $\mathrm{P}(\mu - 1{,}5\sigma < X < \mu + 1{,}5\sigma)$. [3]

Los pesos (en gramos) de los aguacates que se cultivan en un determinado campo siguen una distribución normal de media μ y desviación típica igual a σ. Los aguacates se clasifican, según su peso, en pequeños, medianos, grandes o extragrandes. La siguiente tabla muestra la probabilidad de que un aguacate cultivado en este campo se clasifique como pequeño, mediano, grande o extragrande.

Categoría	Pequeño	Mediano	Grande	Extragrande
Probabilidad	0,04	0,576	0,288	0,096

El peso máximo de un aguacate pequeño es de 106,2 gramos.

El peso mínimo de un aguacate extragrande es de 182,6 gramos.

(b) Halle el valor de μ y el de σ. [5]

Un supermercado compra todos los aguacates de ese campo que pesan más de 106,2 gramos.

(c) Halle la probabilidad de que un aguacate de esta compra elegido al azar se clasifique como:

(i) Mediano

(ii) Grande

(iii) Extragrande [4]

En la siguiente tabla se muestra el precio de venta que tienen en este supermercado las distintas categorías de aguacates:

Categoría	Mediano	Grande	Extragrande
Precio de venta (USD) por aguacate	1,10	1,29	1,96

El supermercado paga a la granja USD 200 estadounidenses por los aguacates y asume que los venderá exactamente en la misma proporción que se los compró a la granja.

(d) Según este modelo, halle la cantidad mínima de aguacates que deben venderse a fin de que la ganancia neta para el supermercado sea al menos de USD 438 estadounidenses. [4]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.