Mathématiques : analyse et approches
Niveau moyen
Épreuve 2

Mardi 2 novembre 2021 (matin)

Numéro de session du candidat

1 heure 30 minutes

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[80 points]**.

8821 – 7120

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

Au conservatoire de musique de Lucy, huit élèves ont passé leur examen en vue d'obtenir leur diplôme de piano et ont obtenu des résultats sur 150. Pour ses dossiers, Lucy a décidé d'enregistrer le nombre moyen d'heures par semaine que chaque élève a déclaré avoir pratiqué dans les semaines précédant l'examen. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Temps moyen de pratique du piano par semaine (h)	28	13	45	33	17	29	39	36
Résultat obtenu au diplôme (D)	115	82	120	116	79	101	110	121

(a) Trouvez le coefficient de corrélation de Pearson, r, pour ces données. [2]

(b) La relation entre les variables peut être modélisée par l'équation de régression $D = ah + b$. Écrivez la valeur de a et la valeur de b. [1]

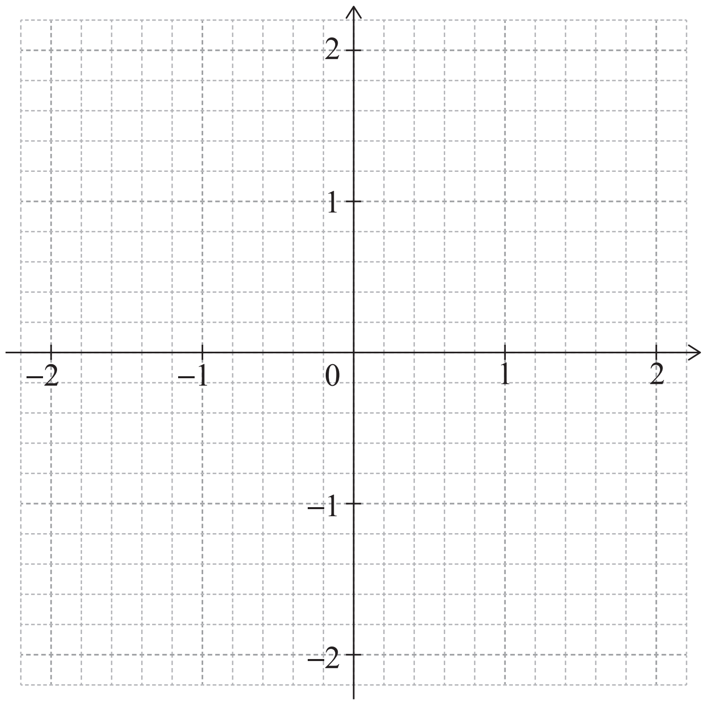
(c) L'une de ces huit élèves a été déçue par son résultat et aurait souhaité avoir pratiqué davantage. En se basant sur les données fournies, déterminez comment son résultat aurait pu changer si elle avait pratiqué cinq heures supplémentaires par semaine. [2]

2. [Note maximale : 5]

Considérez la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 0{,}5$, pour $-2 \le x \le 2$.

(a) Trouvez les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$. [2]

(b) Esquissez la représentation graphique de f sur le système d'axes suivant. [3]



3. [Note maximale : 5]

Considérez un triangle ABC, où $\mathrm{AC} = 12$, $\mathrm{CB} = 7$ et $\mathrm{B\hat{A}C} = 25^{\circ}$.

Trouvez le plus petit périmètre possible du triangle ABC.

4. [Note maximale : 7]

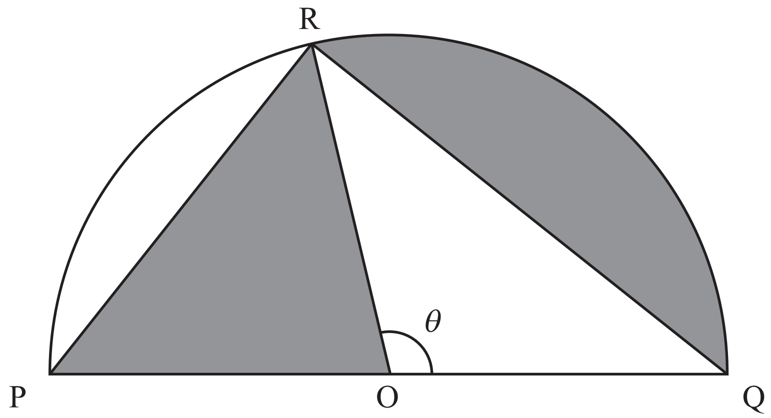
Une usine fabrique des lampes. On sait que la probabilité qu'une lampe soit défectueuse est de $0,05$. Un échantillon aléatoire de 30 lampes est testé.

(a) Trouvez la probabilité qu'il y ait au moins une lampe défectueuse dans l'échantillon. [3]

(b) Étant donné qu'il y a au moins une lampe défectueuse dans l'échantillon, trouvez la probabilité qu'il y ait au plus deux lampes défectueuses. [4]

5. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un demi-cercle de centre O et de rayon r. Les points P, Q et R se situent sur la circonférence du cercle, de sorte que $\mathrm{PQ} = 2r$ et $\mathrm{R\hat{O}Q} = \theta$, où $0 < \theta < \pi$.



(a) Étant donné que les aires des deux régions grisées sont égales, montrez que $\theta = 2\sin\theta$. [5]

(b) À partir de là, déterminez la valeur de θ. [1]

6. [Note maximale : 9]

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donnée par $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^r$.

(a) Trouvez le premier terme de la suite, u_1. [2]

(b) Trouvez S_∞. [3]

(c) Trouvez la plus petite valeur de n telle que $S_\infty - S_n < 0{,}001$. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

7. [Note maximale : 14]

Les points A et P sont situés sur les rives opposées d’une rivière, de sorte que AP est la plus petite distance pour traverser la rivière. Le point B représente le centre d’une ville qui se trouve sur la rive. $\mathrm{PB} = 215\,\mathrm{km}$, $\mathrm{AP} = 65\,\mathrm{km}$ et $\mathrm{A\hat{P}B} = 90^{\circ}$.

Le diagramme suivant montre ces informations.

Un bateau se déplace à une vitesse moyenne de $42\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Un autobus se déplace le long de la route droite entre P et B à une vitesse moyenne de $84\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

(a) Trouvez le temps de déplacement, en heures, de A à B étant donné que

(i) le bateau est pris de A à P et l’autobus de P à B ;

(ii) le bateau se déplace directement vers B. [4]

Il y a un point D, qui se situe sur la route entre P et B, tel que $\mathrm{BD} = x\,\mathrm{km}$. Le bateau se déplace de A à D, et l’autobus se déplace de D à B.

(b) (i) Trouvez une expression, en fonction de x pour le temps de déplacement T, de A à B, en passant par D.

(ii) Trouvez la valeur de x telle que T soit minimal.

(iii) Écrivez la valeur minimale de T. [6]

(Suite de la question à la page suivante)

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 7)

(c) Une excursion implique la location du bateau et de l’autobus. Le coût de la location du bateau est de 200 \$ par heure et le coût de la location de l’autobus est de 150 \$ par heure.

(i) Trouvez la nouvelle valeur de x telle que le coût total C pour se déplacer de A à B en passant par D soit minimal.

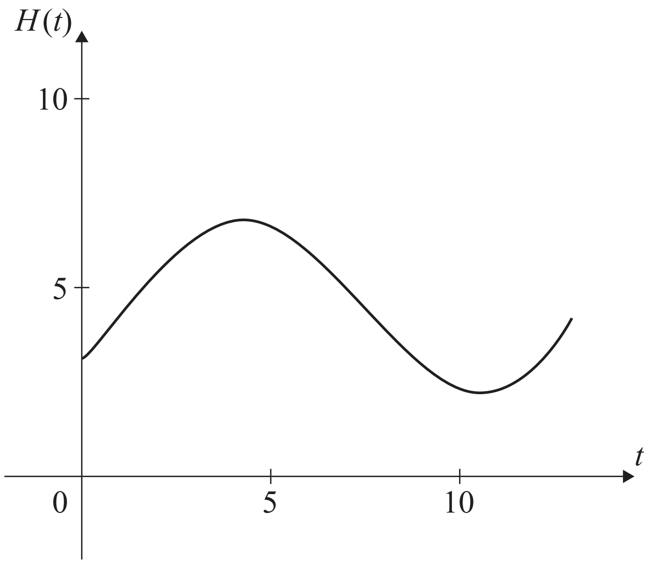
(ii) Écrivez le coût total minimal pour cette excursion. [4]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

8. [Note maximale : 13]

La hauteur de l'eau, en mètres, dans le port de Dungeness est modélisée par la fonction $H(t) = a\sin\big(b(t-c)\big) + d$, où t est le nombre d'heures après minuit, et a, b, c et d sont des constantes, où $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

La représentation graphique suivante montre la hauteur de l'eau sur une période de 13 heures, débutant à minuit.



La première marée haute survient à 4h30 et la prochaine marée haute survient 12 heures plus tard. Au cours de la journée, la hauteur de l'eau fluctue entre $2{,}2\,\text{m}$ et $6{,}8\,\text{m}$.

Toutes les hauteurs sont correctes à un chiffre après la virgule près.

(a) Montrez que $b = \dfrac{\pi}{6}$. [1]

(b) Trouvez la valeur de a. [2]

(c) Trouvez la valeur de d. [2]

(d) Trouvez la plus petite valeur possible de c. [3]

(e) Trouvez la hauteur de l'eau à 12h00. [2]

(f) Déterminez le nombre d'heures, sur une période de 24 heures, pour lesquelles la marée est supérieure à 5 mètres. [3]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

9. [Note maximale : 16]

La variable aléatoire X suit une distribution normale de moyenne μ et d’écart type σ.

(a) Trouvez $\mathrm{P}(\mu - 1{,}5\sigma < X < \mu + 1{,}5\sigma)$. [3]

Les avocats cultivés dans une ferme ont des poids, en grammes, qui sont normalement distribués avec une moyenne μ et un écart type σ. Les avocats sont classés comme petits, moyens, grands ou géants, en fonction de leur poids. Le tableau suivant montre la probabilité qu’un avocat cultivé dans la ferme soit classé comme petit, moyen, grand ou géant.

Catégorie	Petit	Moyen	Grand	Géant
Probabilité	0,04	0,576	0,288	0,096

Le poids maximal d’un petit avocat est de $106{,}2$ grammes.

Le poids minimal d’un avocat géant est de $182{,}6$ grammes.

(b) Trouvez la valeur de μ et celle de σ. [5]

Un supermarché achète tous les avocats de la ferme qui pèsent plus de $106{,}2$ grammes.

(c) Trouvez la probabilité qu’un avocat choisi au hasard dans cet achat soit classé comme

(i) moyen ;

(ii) grand ;

(iii) géant. [4]

Les prix de vente des différentes catégories d’avocats de ce supermarché sont indiqués dans le tableau suivant :

Catégorie	Moyen	Grand	Géant
Prix de vente ($) par avocat	1,10	1,29	1,96

Le supermarché paie 200 $ à l’exploitation agricole pour les avocats et présume qu’il les vendra ensuite exactement dans la même proportion qu’il les a achetés à l’exploitation.

(d) Sur la base de ce modèle, trouvez le nombre minimum d’avocats qui doivent être vendus pour que le bénéfice net du supermarché soit au moins de 438 $. [4]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.