Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 2

Mardi 2 novembre 2021 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d’examen et à votre page de couverture en utilisant l’attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[110 points]**.

14 pages
8821 – 7117

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 7]

Au conservatoire de musique de Lucy, huit élèves ont passé leur examen en vue d'obtenir leur diplôme de piano et ont obtenu des résultats sur 150. Pour ses dossiers, Lucy a décidé d'enregistrer le nombre moyen d'heures par semaine que chaque élève a déclaré avoir pratiqué dans les semaines précédant l'examen. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Temps moyen de pratique du piano par semaine (h)	28	13	45	33	17	29	39	36
Résultat obtenu au diplôme (D)	115	82	120	116	79	101	110	121

(a) Trouvez le coefficient de corrélation de Pearson, r, pour ces données. [2]

(b) La relation entre les variables peut être modélisée par l'équation de régression $D = ah + b$. Écrivez la valeur de a et la valeur de b. [1]

(c) L'une de ces huit élèves a été déçue par son résultat et aurait souhaité avoir pratiqué davantage. En se basant sur les données fournies, déterminez comment son résultat aurait pu changer si elle avait pratiqué cinq heures supplémentaires par semaine. [2]

(d) Lucy affirme que le nombre d'heures qu'un élève pratique a un effet direct sur son résultat final au diplôme. Commentez la validité de l'affirmation de Lucy. [1]

Lucy soupçonne que les élèves n'ont pas pratiqué autant qu'ils l'auraient rapporté. Afin de compenser cela, Lucy déduit un nombre fixe d'heures par semaine à chacune des heures enregistrées par les élèves.

(e) Indiquez comment, le cas échéant, la valeur de r serait affectée. [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

2. [Note maximale : 5]

Considérez un triangle ABC, où $\mathrm{AC} = 12$, $\mathrm{CB} = 7$ et $\mathrm{B\hat{A}C} = 25^{\circ}$.

Trouvez le plus petit périmètre possible du triangle ABC.

3. [Note maximale : 7]

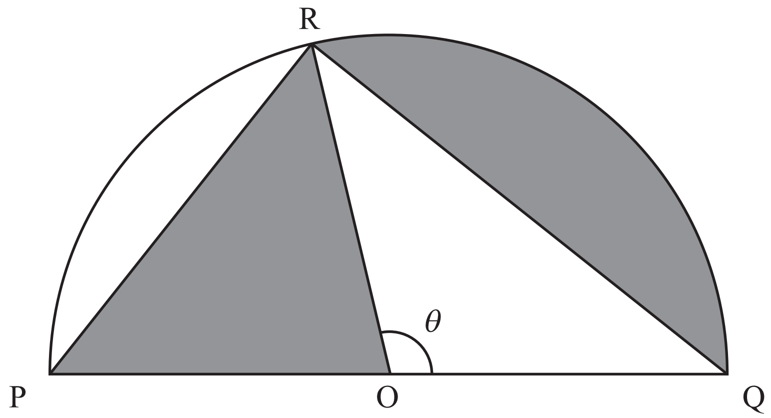
Une usine fabrique des lampes. On sait que la probabilité qu'une lampe soit défectueuse est de $0{,}05$. Un échantillon aléatoire de 30 lampes est testé.

(a) Trouvez la probabilité qu'il y ait au moins une lampe défectueuse dans l'échantillon. [3]

(b) Étant donné qu'il y a au moins une lampe défectueuse dans l'échantillon, trouvez la probabilité qu'il y ait au plus deux lampes défectueuses. [4]

4. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un demi-cercle de centre O et de rayon r. Les points P, Q et R se situent sur la circonférence du cercle, de sorte que $\mathrm{PQ} = 2r$ et $\mathrm{R\hat{O}Q} = \theta$, où $0 < \theta < \pi$.



(a) Étant donné que les aires des deux régions grisées sont égales, montrez que $\theta = 2\sin\theta$. [5]

(b) À partir de là, déterminez la valeur de θ. [1]

5. [Note maximale : 9]

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donnée par $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^r$.

(a) Trouvez le premier terme de la suite, u_1. [2]

(b) Trouvez S_∞. [3]

(c) Trouvez la plus petite valeur de n telle que $S_\infty - S_n < 0{,}001$. [4]

6. [Note maximale : 8]

(a) Prouvez l'identité $(p+q)^3 - 3pq(p+q) \equiv p^3 + q^3$. [2]

L'équation $2x^2 - 5x + 1 = 0$ a deux racines réelles, α et β.

Considérez l'équation $x^2 + mx + n = 0$, où m, $n \in \mathbb{Z}$ et dont les racines sont $\dfrac{1}{\alpha^3}$ et $\dfrac{1}{\beta^3}$.

(b) Sans résoudre $2x^2 - 5x + 1 = 0$, déterminez les valeurs de m et n. [6]

7. [Note maximale : 6]

La fonction de densité d'une variable aléatoire continue X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La médiane de cette distribution est m.

(a) Déterminez la valeur de m. [2]

(b) Étant donné que $P(|X - m| \le a) = 0,3$, déterminez la valeur de a. [4]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. [Note maximale : 8]

Considérez la courbe C donnée par $y = x - xy\ln(xy)$, où $x > 0$, $y > 0$.

(a) Montrez que $\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\left(1 + \ln(xy)\right) = 1$. [3]

(b) À partir de là, trouvez l'équation de la tangente à C au point où $x = 1$. [5]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

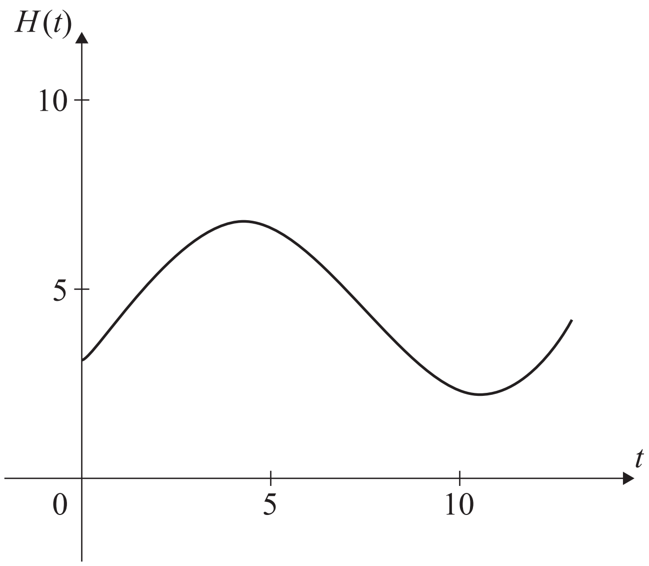
Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

9. [Note maximale : 15]

La hauteur de l’eau, en mètres, dans le port de Dungeness est modélisée par la fonction $H(t) = a\sin\left(b(t-c)\right) + d$, où t est le nombre d’heures après minuit, et a, b, c et d sont des constantes, où $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

La représentation graphique suivante montre la hauteur de l’eau sur une période de 13 heures, débutant à minuit.



La première marée haute survient à 4h30 et la prochaine marée haute survient 12 heures plus tard. Au cours de la journée, la hauteur de l’eau fluctue entre $2{,}2\,\text{m}$ et $6{,}8\,\text{m}$.

Toutes les hauteurs sont correctes à un chiffre après la virgule près.

(a) Montrez que $b = \dfrac{\pi}{6}$. [1]

(b) Trouvez la valeur de a. [2]

(c) Trouvez la valeur de d. [2]

(d) Trouvez la plus petite valeur possible de c. [3]

(e) Trouvez la hauteur de l’eau à 12h00. [2]

(f) Déterminez le nombre d’heures, sur une période de 24 heures, pour lesquelles la marée est supérieure à 5 mètres. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 9)

Un pêcheur constate que la hauteur de l’eau dans le port voisin de Folkestone suit la même courbe sinusoïdale que dans le port de Dungeness mais les marées hautes (et les marées basses) ont lieu 50 minutes avant d’avoir lieu dans le port de Dungeness.

(g) Trouvez une équation adaptée qui pourrait être utilisée pour modéliser la hauteur de l’eau des marées dans le port de Folkestone. [2]

10. [Note maximale : 18]

Considérez la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{2x-15}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\dfrac{15}{2}$.

(a) Trouvez les coordonnées des points où la représentation graphique de f coupe

(i) l’axe des abscisses ;

(ii) l’axe des ordonnées. [3]

(b) Écrivez l’équation de l’asymptote verticale de la représentation graphique de f. [1]

(c) L’asymptote oblique de la représentation graphique de f peut être exprimée comme $y = ax + b$, où a, $b \in \mathbb{Q}$.

Trouvez la valeur de a et la valeur de b. [4]

(d) Esquissez la représentation graphique de f pour $-30 \le x \le 30$, en indiquant clairement les points d’intersection avec chaque axe ainsi que toute asymptote. [3]

(e) (i) Exprimez $\dfrac{1}{f(x)}$ en fractions partielles.

(ii) À partir de là, trouvez la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, en exprimant votre réponse comme un seul logarithme. [7]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 21]

Trois points $\mathrm{A}(3\,;0\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;-2\,;0)$ et $\mathrm{C}(1\,;1\,;-7)$ sont situés sur le plan Π_1.

(a) (i) Trouvez le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

(ii) À partir de là, trouvez l'équation de Π_1, en exprimant votre réponse sous la forme $ax + by + cz = d$, où a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$. [7]

L'équation du plan Π_2 est $3x - y + 2z = 2$.

(b) La droite L est l'intersection de Π_1 et Π_2. Vérifiez que l'équation vectorielle de L peut s'écrire comme $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. [2]

(c) Le plan Π_3 est donné par $2x - 2z = 3$. La droite L et le plan Π_3 se coupent au point P.

(i) Montrez qu'au point P, $\lambda = \dfrac{3}{4}$.

(ii) À partir de là, trouvez les coordonnées de P. [3]

(d) Le point $\mathrm{B}(0\,;-2\,;0)$ est situé sur L.

(i) Trouvez la réflexion du point B dans le plan Π_3.

(ii) À partir de là, trouvez l'équation vectorielle de la droite formée lorsque L est réfléchie dans le plan Π_3. [9]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.