Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 1

Lunes 1 de noviembre de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8821 – 7121

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $y = 2$ para $x = \frac{3\pi}{4}$, halle y en función de x.

2. [Puntuación máxima: 9]

La función f viene dada por $f(x)=\dfrac{2x+4}{3-x}$, donde $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 3$.

(a) Escriba la ecuación de:

(i) La asíntota vertical del gráfico de f

(ii) La asíntota horizontal del gráfico de f [2]

(b) Halle las coordenadas de los puntos donde el gráfico de f corta:

(i) Al eje x

(ii) Al eje y [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

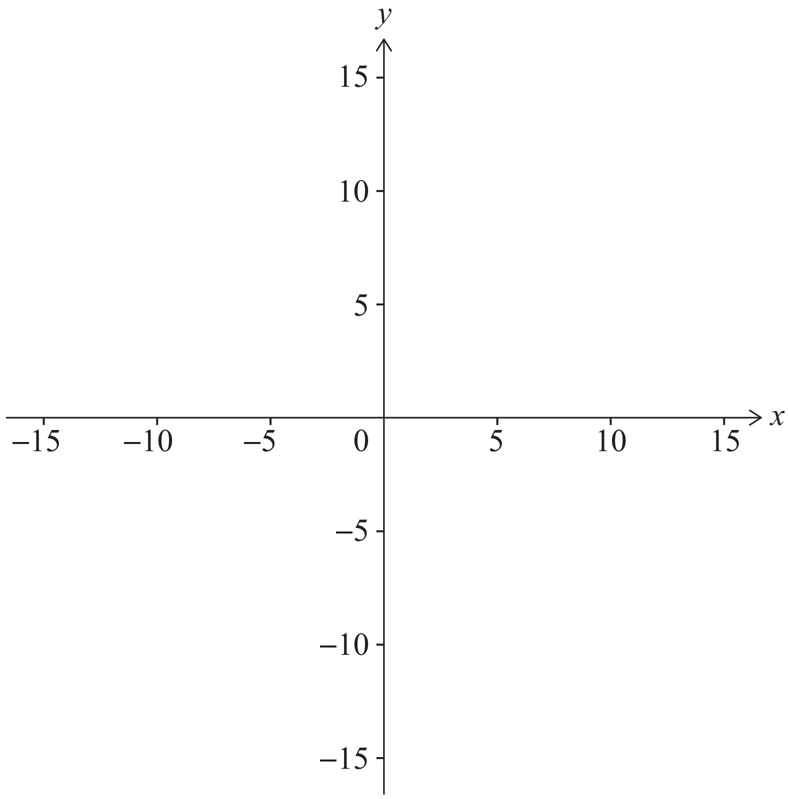
. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

(c) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de f. [1]



La función g viene dada por $g(x)=\dfrac{ax+4}{3-x}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$ y $a \in \mathbb{R}$.

(d) Sabiendo que $g(x)=g^{-1}(x)$, determine el valor de a. [4]

3. [Puntuación máxima: 5]

Resuelva la ecuación $\log_3 \sqrt{x} = \dfrac{1}{2\log_2 3} + \log_3\left(4x^3\right)$, donde $x > 0$.

4. [Puntuación máxima: 5]

La caja 1 contiene 5 bolas rojas y 2 bolas blancas.
La caja 2 contiene 4 bolas rojas y 3 bolas blancas.

(a) Se escoge una caja al azar y se extrae una bola. Halle la probabilidad de que la bola sea roja. [3]

Sea A el suceso “se escoge la caja 1” y sea R el suceso “se extrae una bola roja”.

(b) Determine si los sucesos A y R son independientes. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Puntuación máxima: 7]

La función f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. La recta que tiene por ecuación $y = 6x - 1$ es la tangente al gráfico de f en $x = 4$.

(a) Escriba el valor de $f'(4)$. [1]

(b) Halle $f(4)$. [1]

La función g está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $g(x) = x^2 - 3x$ y $h(x) = f\left(g(x)\right)$.

(c) Halle $h(4)$. [2]

(d) A partir de lo anterior, halle la ecuación de la tangente al gráfico de h en $x = 4$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 7]

(a) Muestre que $2x-3-\dfrac{6}{x-1}=\dfrac{2x^2-5x-3}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. [2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación
$2\,\text{sen}\,2\theta-3-\dfrac{6}{\text{sen}\,2\theta-1}=0$ para $0 \le \theta \le \pi$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$. [5]

7. [Puntuación máxima: 7]

La ecuación $3px^2 + 2px + 1 = p$ tiene dos raíces reales y distintas.

(a) Halle los posibles valores de p. [5]

(b) Considere el caso en el que $p = 4$. Las raíces de la ecuación se pueden expresar en la forma $x = \dfrac{a \pm \sqrt{13}}{6}$, donde $a \in \mathbb{Z}$. Halle el valor de a. [2]

8. [Puntuación máxima: 7]

Resuelva la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\ln 2x}{x^2} - \frac{2y}{x}$, $x > 0$, sabiendo que $y = 4$ para $x = \frac{1}{2}$.

Dé la respuesta en la forma $y = f(x)$.

9. [Puntuación máxima: 7]

Considere la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{1+ax}} - \sqrt{1-x}$, donde $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

El desarrollo de la potencia de un binomio para esta expresión, en potencias ascendentes de x, hasta el término en x^2 es $4bx + bx^2$, donde $b \in \mathbb{Q}$.

(a) Halle el valor de a y el valor de b. [6]

(b) Indique la restricción que hay que imponer a x para que este desarrollo sea válido. [1]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 16]

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x. La velocidad de P es igual a $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ en el instante t segundos, donde $v(t) = 4 + 4t - 3t^2$ para $0 \le t \le 3$. Cuando $t = 0$, P se encuentra en el origen O.

(a) (i) Halle el valor de t para el que P alcanza su velocidad máxima.

(ii) Muestre que, en ese instante, la distancia de P a O es igual a $\frac{88}{27}$ metros. [7]

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico de v en función de t, mostrando claramente todos los puntos de intersección con los ejes que haya. [4]

(c) Halle la distancia total que ha recorrido P. [5]

11. [Puntuación máxima: 14]

(a) Demuestre mediante inducción matemática que $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2\mathrm{e}^x\right) = \left[x^2 + 2nx + n(n-1)\right]\mathrm{e}^x$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. [7]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine la serie de Maclaurin para $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ en potencias ascendentes de x, hasta (e incluido) el término en x^4. [3]

(c) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine el valor de $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(x^2\mathrm{e}^x - x^2\right)^3}{x^9}\right]$. [4]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 22]

Considere la ecuación $(z-1)^3 = \mathrm{i}$, $z \in \mathbb{C}$. Las raíces de esta ecuación son ω_1, ω_2 y ω_3, donde $\mathrm{Im}(\omega_2) > 0$ e $\mathrm{Im}(\omega_3) < 0$.

(a) (i) Verifique que $\omega_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ es una raíz de esta ecuación.

(ii) Halle ω_2 y ω_3, expresándolas en la forma $a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $\theta > 0$. [6]

Las raíces ω_1, ω_2 y ω_3 se pueden representar mediante los puntos A, B y C, respectivamente, en un diagrama de Argand.

(b) Sitúe los puntos A, B y C en un diagrama de Argand. [4]

(c) Halle AC. [3]

Considere la ecuación $(z-1)^3 = \mathrm{i}z^3$, $z \in \mathbb{C}$.

(d) Utilizando el teorema de De Moivre, muestre que $\alpha = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ es una raíz de esta ecuación. [3]

(e) Determine el valor de $\mathrm{Re}(\alpha)$. [6]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.