Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 1

Lundi 1 novembre 2021 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

8821 – 7116

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 4]

Étant donné que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ et $y = 2$ lorsque $x = \frac{3\pi}{4}$, trouvez y en fonction de x.

2. [Note maximale : 9]

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{2x+4}{3-x}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$.

(a) Écrivez l'équation de

(i) l'asymptote verticale de la représentation graphique de f ;

(ii) l'asymptote horizontale de la représentation graphique de f. [2]

(b) Trouvez les coordonnées des points où la représentation graphique de f coupe

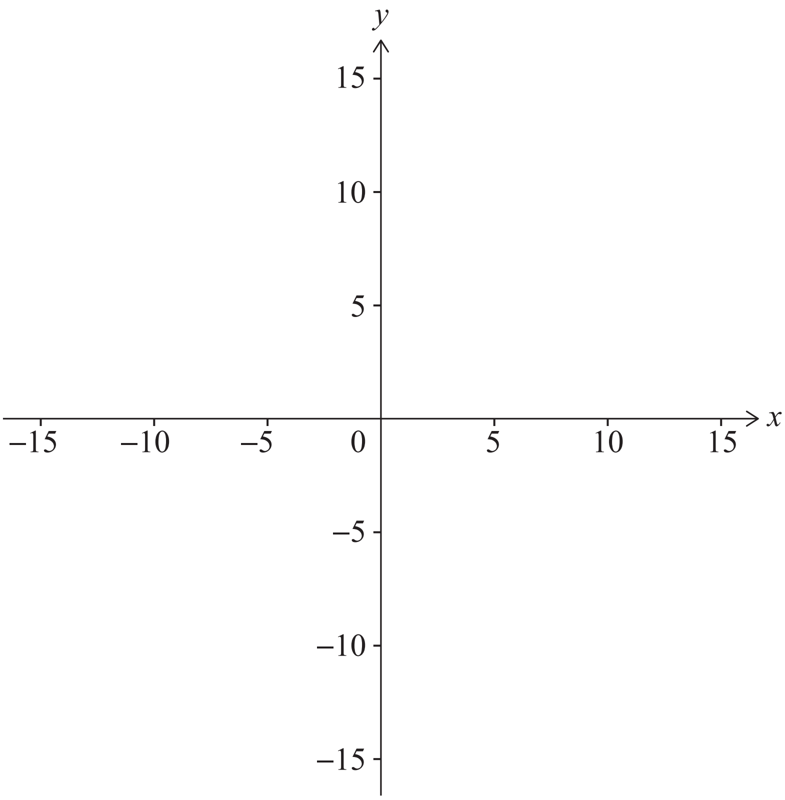
(i) l'axe des abscisses ;

(ii) l'axe des ordonnées. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

(c) Esquissez la représentation graphique de f sur le système d'axes ci-dessous. [1]



La fonction g est définie par $g\left(x\right)=\dfrac{ax+4}{3-x}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$ et $a \in \mathbb{R}$.

(d) Étant donné que $g(x)=g^{-1}(x)$, déterminez la valeur de a. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Note maximale : 5]

Résolvez l'équation $\log_3 \sqrt{x} = \dfrac{1}{2\log_2 3} + \log_3\left(4x^3\right)$, où $x > 0$.

4. [Note maximale : 5]

La boîte 1 contient 5 balles rouges et 2 balles blanches.
La boîte 2 contient 4 balles rouges et 3 balles blanches.

(a) On choisit une boîte au hasard et on tire une balle de cette boîte. Trouvez la probabilité que la balle soit rouge. [3]

Soit A l'événement « on choisit la boîte 1 » et soit R l'événement « on tire une balle rouge ».

(b) Déterminez si les événements A et R sont indépendants. [2]

5. [Note maximale : 7]

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La droite d'équation $y = 6x - 1$ est la tangente à la représentation graphique de f en $x = 4$.

(a) Écrivez la valeur de $f'(4)$. [1]

(b) Trouvez $f(4)$. [1]

La fonction g est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $g(x) = x^2 - 3x$ et $h(x) = f\left(g(x)\right)$.

(c) Trouvez $h(4)$. [2]

(d) À partir de là, trouvez l'équation de la tangente à la représentation graphique de h en $x = 4$. [3]

6. [Note maximale : 7]

(a) Montrez que $2x-3-\dfrac{6}{x-1}=\dfrac{2x^2-5x-3}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$. [2]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, résolvez l'équation

$2\sin 2\theta-3-\dfrac{6}{\sin 2\theta-1}=0$ pour $0\leq\theta\leq\pi$, $\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$. [5]

7. [Note maximale : 7]

L'équation $3px^2 + 2px + 1 = p$ a deux racines réelles distinctes.

(a) Trouvez les valeurs possibles pour p. [5]

(b) Considérez le cas lorsque $p = 4$. Les racines de l'équation peuvent être exprimées sous la forme $x = \frac{a \pm \sqrt{13}}{6}$, où $a \in \mathbb{Z}$. Trouvez la valeur de a. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Note maximale : 7]

Résolvez l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\ln 2x}{x^2} - \frac{2y}{x}$, $x > 0$, étant donné que $y = 4$ lorsque $x = \frac{1}{2}$.

Donnez votre réponse sous la forme $y = f(x)$.

9. [Note maximale : 7]

Considérez l'expression $\frac{1}{\sqrt{1+ax}} - \sqrt{1-x}$, où $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

Le développement de cette expression à l'aide de la formule du binôme de Newton, en puissances croissantes de x, jusqu'au terme en x^2 est $4bx + bx^2$, où $b \in \mathbb{Q}$.

(a) Trouvez la valeur de a et la valeur de b. [6]

(b) Indiquez la restriction qui doit être imposée à x pour que ce développement soit valide. [1]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 16]

Une particule P se déplace le long de l'axe des abscisses. La vitesse algébrique de P est $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ au temps t secondes, où $v(t) = 4 + 4t - 3t^2$ pour $0 \le t \le 3$. Lorsque $t = 0$, P est à l'origine O.

(a) (i) Trouvez la valeur de t lorsque P atteint sa vitesse algébrique maximale.

(ii) Montrez que la distance de P à O à cet instant est de $\frac{88}{27}$ mètres. [7]

(b) Esquissez une représentation graphique de v en fonction de t, en montrant clairement tout point d'intersection avec les axes. [4]

(c) Trouvez la distance totale parcourue par P. [5]

11. [Note maximale : 14]

(a) Prouvez par récurrence que $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2\mathrm{e}^x\right) = \left[x^2 + 2nx + n\left(n-1\right)\right]\mathrm{e}^x$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$. [7]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, déterminez la série de Maclaurin de $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ en puissances croissantes de x, jusqu'au terme en x^4 et en incluant celui-ci. [3]

(c) À partir de là ou par toute autre méthode, déterminez la valeur de $\lim_{x \to 0}\left[\frac{\left(x^2\mathrm{e}^x - x^2\right)^3}{x^9}\right]$. [4]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 22]

Considérez l'équation $(z-1)^3 = \mathrm{i}$, $z \in \mathbb{C}$. Les racines de cette équation sont ω_1, ω_2 et ω_3, où $\mathrm{Im}(\omega_2) > 0$ et $\mathrm{Im}(\omega_3) < 0$.

(a) (i) Vérifiez que $\omega_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est une racine de cette équation.

(ii) Trouvez ω_2 et ω_3, en les exprimant sous la forme $a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $\theta > 0$. [6]

Les racines ω_1, ω_2 et ω_3 sont représentées respectivement par les points A, B et C sur un diagramme d'Argand.

(b) Placez les points A, B et C sur un diagramme d'Argand. [4]

(c) Trouvez AC. [3]

Considérez l'équation $(z-1)^3 = \mathrm{i}z^3$, $z \in \mathbb{C}$.

(d) En utilisant le théorème de De Moivre, montrez que $\alpha = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ est une racine de cette équation. [3]

(e) Déterminez la valeur de $\mathrm{Re}(\alpha)$. [6]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.