Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Análisis

Jueves 16 de noviembre de 2017 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

8817 – 7228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 5]

La función f viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 1 \\ ax + b, & x \geq 1 \end{cases}$$

donde a y b son constantes reales.

Sabiendo que tanto f como su derivada son continuas en $x = 1$, halle el valor de a y el valor de b.

2. [Puntuación máxima: 10]

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{x^2+1}y = x$, donde para $x = 0$, $y = 1$.

(a) Muestre que $\sqrt{x^2+1}$ es un factor integrante para esta ecuación diferencial. [4]

(b) Resuelva la ecuación diferencial, y exprese la respuesta de la forma $y = f(x)$. [6]

3. [Puntuación máxima: 12]

(a) Utilice el criterio de comparación del límite para mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ es convergente. [3]

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2+2}$.

(b) Halle el intervalo de convergencia de S. [9]

4. [Puntuación máxima: 10]

El teorema del valor medio dice que si f es una función continua en $[a\,, b]$ y derivable en $]a\,, b[$, entonces existe algún $c \in\,]a\,, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La función g, que viene dada por $g(x) = x\cos\left(\sqrt{x}\right)$, satisface las condiciones del teorema del valor medio para el intervalo $[0\,, 5\pi]$.

(a) Para esta función g, y tomando $a = 0$ y $b = 5\pi$, utilice el teorema del valor medio para hallar todos los posibles valores de c. [6]

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$ en el intervalo $[0\,, 5\pi]$ y, a partir de lo anterior, ilustre el teorema del valor medio aplicado a la función g. [4]

5. [Puntuación máxima: 13]

Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}(p \operatorname{arcsen} x)$, $-1 < x < 1$ y $p \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que $f'(0) = p$. [2]

La función f y sus derivadas satisfacen

$$\left(1 - x^2\right) f^{(n+2)}(x) - (2n + 1)\, x f^{(n+1)}(x) + \left(p^2 - n^2\right) f^{(n)}(x) = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$$

donde $f^{(n)}(x)$ es la n-ésima derivada de $f(x)$ y $f^{(0)}(x)$ es $f(x)$.

(b) Muestre que $f^{(n+2)}(0) = \left(n^2 - p^2\right) f^{(n)}(0)$. [1]

(c) Para $p \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\,, \pm 3\}$, muestre que la serie de Maclaurin correspondiente a $f(x)$ hasta el término en x^5 inclusive, es

$$px + \frac{p\left(1 - p^2\right)}{3!} x^3 + \frac{p\left(9 - p^2\right)\left(1 - p^2\right)}{5!} x^5\,.$$ [4]

(d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(p \operatorname{arcsen} x)}{x}$. [2]

(e) Si p es un número entero impar, demuestre que la serie de Maclaurin para $f(x)$ es un polinomio de grado p. [4]