Matemáticas
Nivel medio
Prueba 2

Martes 14 de noviembre de 2017 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NM** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

15 páginas

8817 – 7310

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

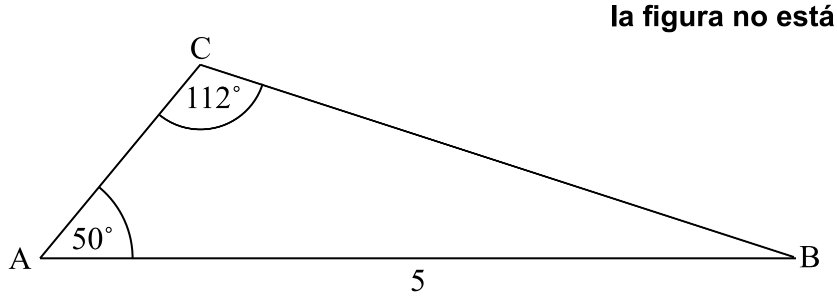
Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra un triángulo ABC.

la figura no está dibujada a escala



$$\text{AB} = 5\,\text{cm},\ \text{C}\hat{\text{A}}\text{B} = 50^\circ \text{ y } \text{A}\hat{\text{C}}\text{B} = 112^\circ$$

(a) Halle BC. [3]

(b) Halle el área del triángulo ABC. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

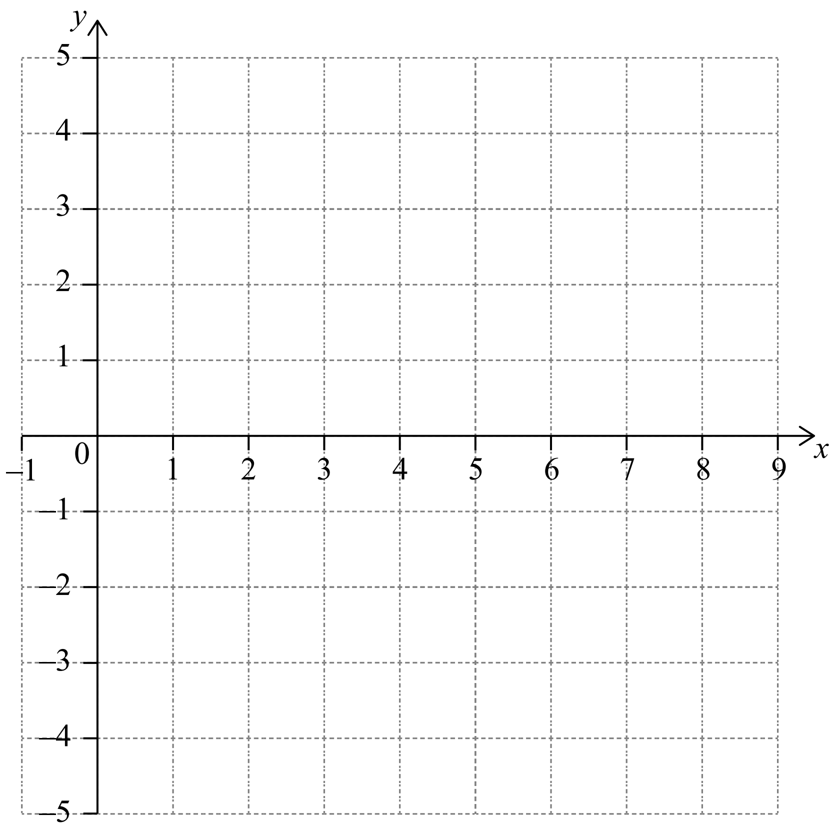
2. [Puntuación máxima: 7]

Sea $f(x) = \dfrac{6x^2 - 4}{e^x}$, para $0 \le x \le 7$.

(a) Halle el punto de corte del gráfico de f con el eje x. [2]

(b) El gráfico de f tiene un máximo en el punto A. Escriba las coordenadas de A. [2]

(c) En la siguiente cuadrícula, dibuje aproximadamente el gráfico de f. [3]



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 6]

Sea $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Halle $\left| \overrightarrow{AB} \right|$. [2]

(b) Sea $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Halle $B\hat{A}C$. [4]

4. [Puntuación máxima: 8]

Una variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad.

X	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x)$	0,475	$2k^2$	$\frac{k}{10}$	$6k^2$

(a) Halle el valor de k. [4]

(b) Escriba $\mathrm{P}(X=2)$. [1]

(c) Halle $\mathrm{P}(X=2 \mid X>0)$. [3]

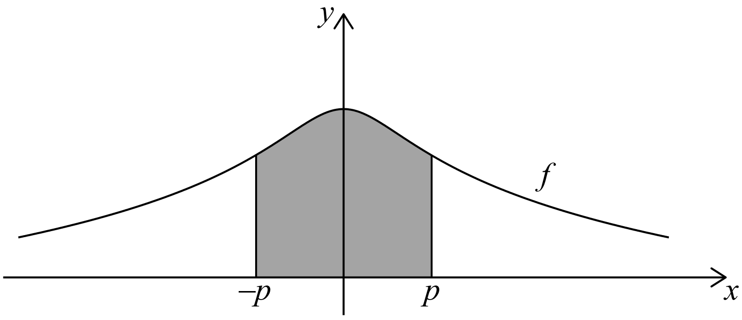
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. [Puntuación máxima: 5]

Sea $f(x) = 6 - \ln(x^2 + 2)$, para $x \in \mathbb{R}$. El gráfico de f pasa por el punto $(p, 4)$, donde $p > 0$.

(a) Halle el valor de p. [2]

(b) La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f.



La región delimitada por el gráfico de f, el eje x y las rectas $x = -p$ y $x = p$ se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido así generado. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 6]

En el desarrollo de $ax^3(2+ax)^{11}$, el coeficiente del término en x^5 es 11880.
Halle el valor de a.

7. [Puntuación máxima: 7]

Las estaturas de los hombres adultos de un país dado siguen una distribución normal, de media $180\,\mathrm{cm}$ y desviación típica igual a $\sigma\,\mathrm{cm}$. Un 17% de esos hombres miden menos de $168\,\mathrm{cm}$. Un 80% de esos hombres miden entre $(192-h)\,\mathrm{cm}$ y $192\,\mathrm{cm}$.

Halle el valor de h.

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

8. [Puntuación máxima: 14]

Adam es un apicultor que fue recopilando los datos de producción mensual de miel de sus colmenas. En la siguiente tabla se muestran los datos correspondientes a seis de sus colmenas.

Números de abejas (N)	190	220	250	285	305	320
Producción mensual de miel en gramos (P)	900	1100	1200	1500	1700	1800

La relación entre las variables está modelizada por una recta de regresión cuya ecuación es $P = aN + b$.

(a) Escriba el valor de a y el de b. [3]

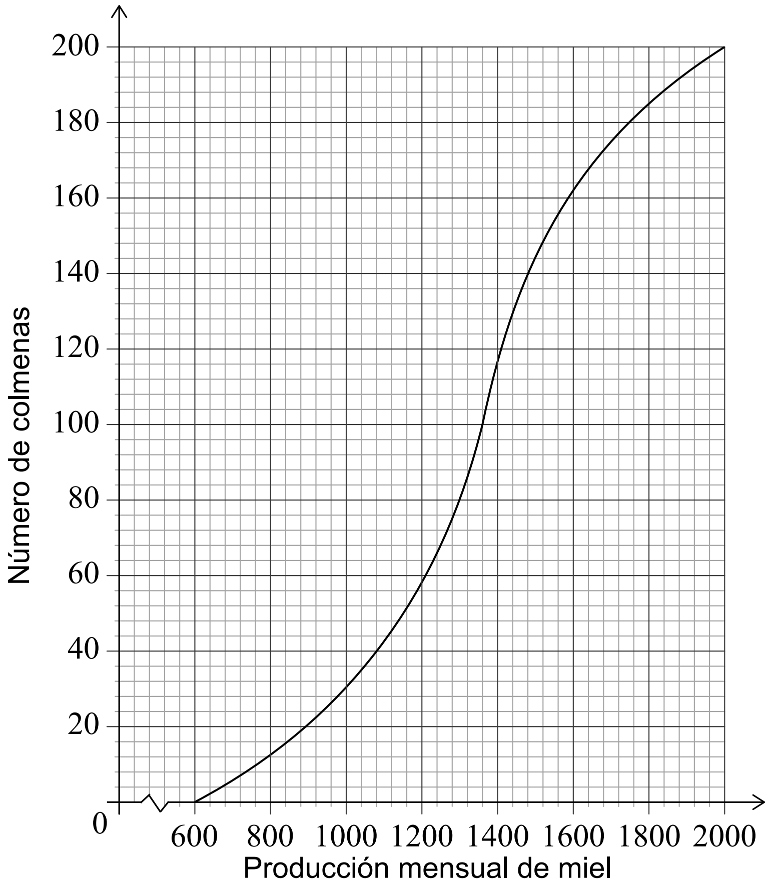
(b) Utilice esta recta de regresión para estimar cuál será la producción mensual de miel de una colmena que tenga 270 abejas. [2]

Adam tiene 200 colmenas en total. Recoge datos sobre la producción mensual de miel de todas las colmenas. Dichos datos se muestran en el siguiente gráfico de frecuencias acumuladas.

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 8: continuación)



Las colmenas de Adam se definen como colmenas de producción baja, normal o alta, según los criterios que aparecen en la siguiente tabla.

Tipo de colmena	baja	normal	alta
Producción mensual de miel en gramos (P)	$P \leq 1080$	$1080 < P \leq k$	$P > k$

(c) Escriba el número de colmenas de producción baja. [1]

Adam sabe que 128 de sus colmenas son de producción normal.

(d) Halle

(i) el valor de k;

(ii) el número de colmenas que son de producción alta. [5]

(e) Adam decide aumentar el número de abejas que hay en cada una de las colmenas de producción baja. Las investigaciones realizadas sugieren que existe una probabilidad igual a $0{,}75$ de que una colmena de producción baja pase a ser una colmena de producción normal. Calcule la probabilidad de que 30 colmenas de producción baja se conviertan en colmenas de producción normal. [3]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 14]

Nota: En esta pregunta, las distancias están en metros y el tiempo está en segundos.

Una partícula P se mueve en línea recta durante cinco segundos. Su aceleración en el instante t viene dada por $a = 3t^2 - 14t + 8$, para $0 \le t \le 5$.

(a) Escriba los valores de t en los que $a = 0$. [2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle todos los posibles valores de t para los cuales la velocidad de P es decreciente. [2]

Cuando $t = 0$, la velocidad de P es igual a $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(c) Halle una expresión para la velocidad de P en el instante t. [6]

(d) Halle la distancia total que recorre P cuando su velocidad es creciente. [4]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 17]

Nota: En esta pregunta, las distancias están dadas en milímetros.

Sea $f(x) = x + a\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + a$, para $x \geq 0$.

(a) Muestre que $f(2\pi) = 2\pi$. [3]

El gráfico de f pasa por el origen. Sea P_k cualquier punto del gráfico de f cuya coordenada x es $2k\pi$, donde $k \in \mathbb{N}$. Una recta L pasa por todos los puntos P_k.

(b) (i) Halle las coordenadas de P_0 y las de P_1.

(ii) Halle la ecuación de L. [6]

(c) Muestre que la distancia entre las coordenadas x de P_k y P_{k+1} es igual a 2π. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

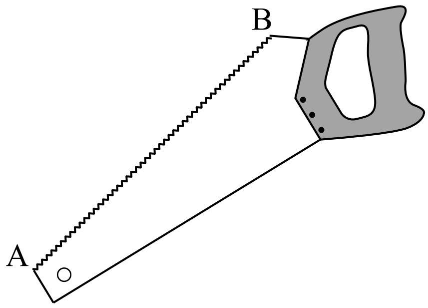
No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

La figura 1 muestra el dibujo de una sierra. La longitud del borde dentado de la sierra es la distancia AB.

Figura 1

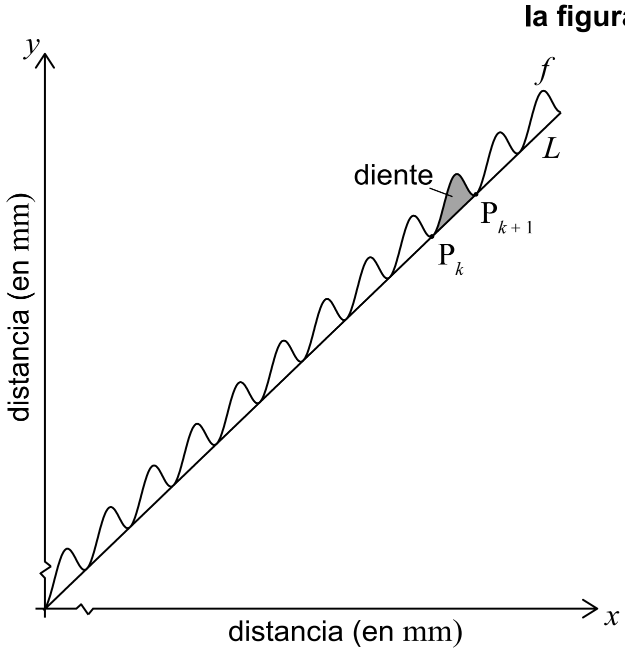
la figura no está dibujada a escala



Dicho borde dentado se puede modelizar utilizando el gráfico de f y la recta L.
La Figura 2 representa este modelo.

Figura 2

la figura no está dibujada a escala



La parte sombreada del gráfico se denomina diente. Un diente se representa mediante la región delimitada por el gráfico de f y la recta L, entre P_k y P_{k+1}.

(d) Una sierra dada tiene un borde dentado de 300 mm de longitud. Halle el número de dientes completos que tiene esta sierra. [6]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.