Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 2

Martes 14 de noviembre de 2017 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

13 páginas

8817 – 7226

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

En un supermercado del barrio venden cajas de fruta variada.
La caja A contiene 2 plátanos, 3 kiwis y 4 melones, y cuesta $\$6{,}58$.
La caja B contiene 5 plátanos, 2 kiwis y 8 melones, y cuesta $\$12{,}32$.
La caja C contiene 5 plátanos y 4 kiwis, y cuesta $\$3{,}00$.

Halle el costo de cada tipo de fruta.

2. [Puntuación máxima: 6]

Sean los sucesos A y B tales que $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}95$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}6$ y $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}75$.

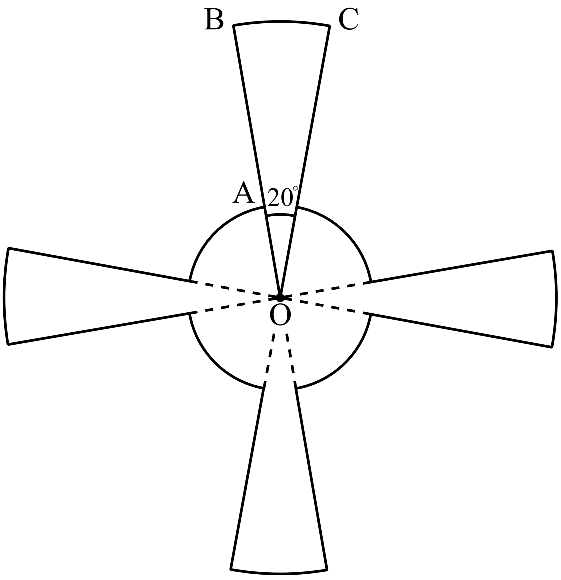
(a) Halle $\mathrm{P}(B)$. [2]

(b) Halle $\mathrm{P}(A)$. [2]

(c) A partir de lo anterior, muestre que los sucesos A' y B son independientes. [2]

3. [Puntuación máxima: 4]

La figura muestra un colgante metálico compuesto por cuatro sectores circulares iguales de un círculo grande de radio $\mathrm{OB} = 9\,\mathrm{cm}$ y cuatro sectores circulares iguales de un círculo más pequeño de radio $\mathrm{OA} = 3\,\mathrm{cm}$.
El ángulo $\mathrm{BOC} = 20^\circ$.



Halle el área del colgante.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

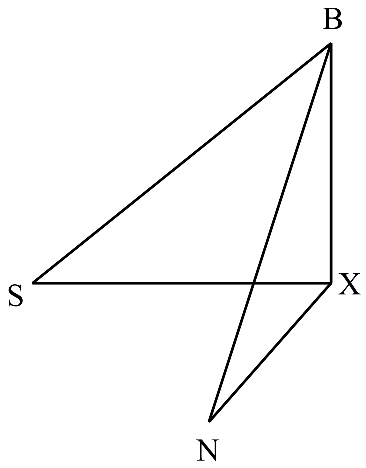
4. [Puntuación máxima: 6]

Se sabe que una de cada cinco tazas de café contiene más de $120\,\text{mg}$ de cafeína. También se sabe que tres de cada cinco tazas de café contienen más de $110\,\text{mg}$ de cafeína.

Suponiendo que el contenido de cafeína que hay en el café se modeliza mediante una distribución normal, halle la media y la desviación típica del contenido de cafeína que hay en el café.

5. [Puntuación máxima: 6]

Barry está en la parte superior de un acantilado, a $80\,\mathrm{m}$ sobre el nivel del mar, y observa dos yates que hay en el mar.
El “*Seaview*” (S) lo observa con un ángulo de depresión de 25°.
El “*Nauti Buoy*” (N) lo observa con un ángulo de depresión de 35°.
El siguiente diagrama tridimensional representa a Barry y a los dos yates, situados en S y en N.
X está situado en la base del acantilado y el ángulo $\mathrm{SXN} = 70^\circ$.



Halle la distancia que separa a los dos yates, con una aproximación de 3 cifras significativas.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. [Puntuación máxima: 6]

El número de plátanos que come Lucca a lo largo de un día cualquiera sigue una distribución de Poisson de media $0{,}2$.

(a) Halle la probabilidad de que Lucca, a lo largo de un día concreto, haya comido al menos un plátano. [2]

(b) Halle el número esperado de semanas al año en las que Lucca no come ningún plátano. [4]

7. [Puntuación máxima: 5]

En la ecuación cuadrática $7x^2 - 8x + p = 0$, $(p \in \mathbb{Q})$, una de las raíces es tres veces mayor que la otra raíz.
Halle el valor de p.

8. [Puntuación máxima: 7]

Utilizando la sustitución $x^2 = 2\sec\theta$, muestre que $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4 - 4}} = \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{2}{x^2}\right) + c$.

9. [Puntuación máxima: 6]

Doce alumnos tienen que presentarse a un examen sobre combinatoria avanzada. El aula donde hacen el examen tiene tres filas de cuatro pupitres cada una, y el profesor encargado de supervisar el examen (el supervisor) se sitúa en la parte delantera del aula, como se muestra en el siguiente diagrama.

SUPERVISOR

Pupitre 1	Pupitre 2	Pupitre 3	Pupitre 4
Pupitre 5	Pupitre 6	Pupitre 7	Pupitre 8
Pupitre 9	Pupitre 10	Pupitre 11	Pupitre 12

(a) Halle el número de maneras en que pueden sentarse los doce alumnos en esta aula. [1]

Se sospecha que dos de los alumnos, Helen y Nicky, hicieron trampas en un examen previo.

(b) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos, sabiendo que Helen y Nicky tienen que sentarse uno directamente detrás del otro (sin pupitres de por medio). Por ejemplo, Pupitre 5 y Pupitre 9. [2]

(c) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos si Helen y Nicky no deben sentarse uno al lado del otro en la misma fila. [3]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 17]

Considere la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$, $0 < x < \pi$.

(a) (i) Muestre que la coordenada x del punto mínimo de la curva $y = f(x)$ satisface la ecuación $\tan x = 2x$.

(ii) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ es una función decreciente. [7]

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, mostrando claramente el punto mínimo y todo comportamiento asintótico. [3]

(c) Halle las coordenadas del punto del gráfico de f en el cual la normal al gráfico es paralela a la recta $y = -x$. [4]

Considere la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$.

(d) Ahora se rota esta región 2π radianes alrededor del eje x. Halle el volumen de revolución. [3]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 18]

Considere la función $f(x) = 2\,\mathrm{sen}^2 x + 7\,\mathrm{sen}\,2x + \tan x - 9,\ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$.

(a) (i) Determine una expresión para $f'(x)$ en función de x.

(ii) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f'(x)$ para $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$.

(iii) Halle la coordenada x del punto (o de los puntos) de inflexión del gráfico de $y = f(x)$, rotulándolo(s) claramente en el gráfico de $y = f'(x)$. [8]

(b) Sea $u = \tan x$.

(i) Exprese $\mathrm{sen}\,x$ en función de u.

(ii) Exprese $\mathrm{sen}\,2x$ en función de u.

(iii) A partir de lo anterior, muestre que $f(x) = 0$ se puede expresar como $u^3 - 7u^2 + 15u - 9 = 0$. [7]

(c) Resuelva la ecuación $f(x) = 0$, y dé las respuestas en la forma $\arctan k$, donde $k \in \mathbb{Z}$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 15]

Phil quiere comprarse una casa y le pide al banco un préstamo de $\$150\,000$ a una tasa de interés anual del $3{,}5\,\%$. El interés se calcula al final de cada año y se va añadiendo a la deuda pendiente.

(a) Halle la cantidad de dinero que Phil deberá al banco cuando hayan transcurrido 20 años. Dé la respuesta aproximando al número entero de dólares más cercano. [3]

Para devolver el préstamo, Phil deposita al final de cada año $\$P$ en una cuenta de ahorro que paga una tasa de interés anual del $2\,\%$. Phil realiza el primer depósito al final del primer año (contando a partir del momento en que le conceden el préstamo).

(b) Muestre que, al cabo de 20 años, el valor total de los ahorros de Phil será de $\frac{\left(1{,}02^{20}-1\right)P}{\left(1{,}02-1\right)}$. [3]

(c) Sabiendo que el objetivo de Phil es tener la casa en propiedad al cabo de 20 años, halle el valor de P, aproximado al número entero de dólares más cercano. [3]

David va a otro banco y realiza un único depósito de $\$Q$. En ese banco la tasa de interés anual es del $2{,}8\,\%$.

(d) (i) David quiere ir sacando de su cuenta $\$5000$ al final de cada año, durante un período de n años.
Muestre que la expresión correspondiente al valor mínimo de Q es $\frac{5000}{1{,}028}+\frac{5000}{1{,}028^2}+\ldots+\frac{5000}{1{,}028^n}$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el mínimo valor de Q que le permitiría a David sacar $\$5000$ de su cuenta todos los años de manera indefinida. Dé la respuesta aproximada al número entero de dólares más cercano. [6]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.