Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 1

Lunes 13 de noviembre de 2017 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

8817 – 7225

14 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Resuelva la ecuación $\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = 4$.

2. [Puntuación máxima: 6]

Sean los puntos $\mathrm{A}(0, 3, -6)$ y $\mathrm{B}(6, -5, 11)$.

El plano Π está definido por la ecuación $4x - 3y + 2z = 20$.

(a) Halle una ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos A y B. [3]

(b) Halle las coordenadas del punto de intersección de la recta L y el plano Π. [3]

3. [Puntuación máxima: 6]

Considere el polinomio $q(x) = 3x^3 - 11x^2 + kx + 8$.

(a) Sabiendo que $(x - 4)$ es uno de los factores de $q(x)$, halle el valor de k. [3]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, factorice $q(x)$ como producto de factores lineales. [3]

4. [Puntuación máxima: 4]

Halle el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^7$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

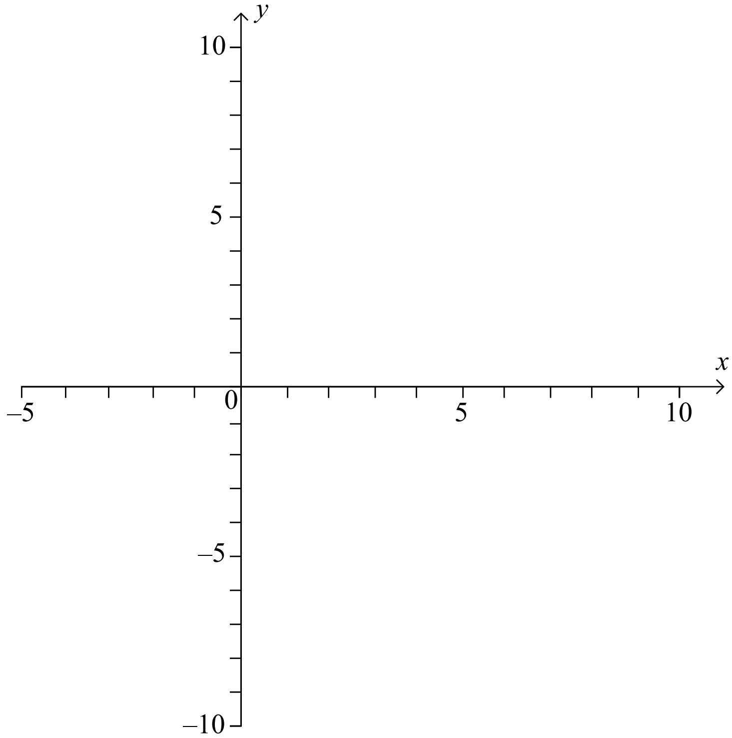
. . . .

5. [Puntuación máxima: 5]

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que en el instante t segundos $(t \geq 0)$, su velocidad v, en ms^{-1}, viene dada por $v = 10te^{-2t}$. Halle la distancia exacta que recorre la partícula en el primer medio segundo.

6. [Puntuación máxima: 9]

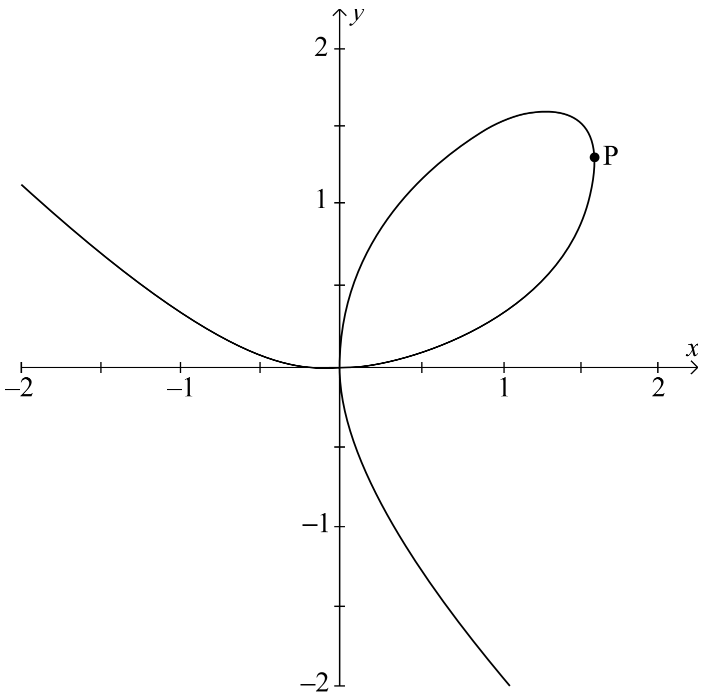
(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \dfrac{1 - 3x}{x - 2}$, mostrando claramente todas las asíntotas e indicando las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes. [4]



(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la inecuación $\left|\dfrac{1 - 3x}{x - 2}\right| < 2$. [5]

7. [Puntuación máxima: 8]

La siguiente figura muestra la hoja de Descartes, una curva que está definida por la ecuación $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.



Determine las coordenadas exactas del punto P de la curva en el que la recta tangente es paralela al eje y.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Puntuación máxima: 7]

Determine las raíces de la ecuación $(z+2\mathrm{i})^3 = 216\mathrm{i}$, $z \in \mathbb{C}$, y dé las respuestas en la forma $z = a\sqrt{3} + b\mathrm{i}$ donde a, $b \in \mathbb{Z}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

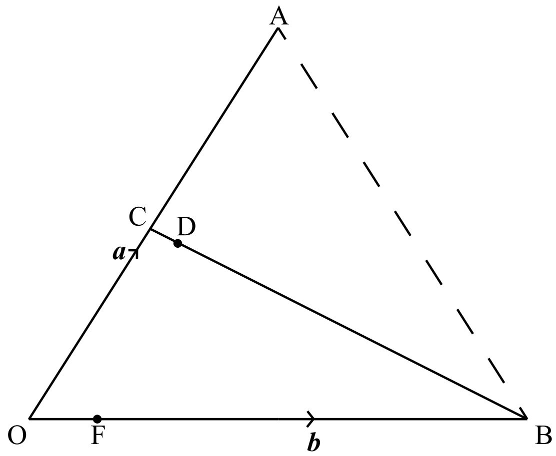
No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 18]

En la siguiente figura, $\vec{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$ y $\vec{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$. C es el punto medio de $[\mathrm{OA}]$ y $\vec{\mathrm{OF}} = \frac{1}{6}\vec{\mathrm{FB}}$.



(a) Halle, en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

(i) $\vec{\mathrm{OF}}$;

(ii) $\vec{\mathrm{AF}}$. [3]

Se sabe también que $\vec{\mathrm{AD}} = \lambda\vec{\mathrm{AF}}$ y que $\vec{\mathrm{CD}} = \mu\vec{\mathrm{CB}}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) Halle una expresión para

(i) $\vec{\mathrm{OD}}$ en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y λ;

(ii) $\vec{\mathrm{OD}}$ en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y μ. [4]

(c) Muestre que $\mu = \frac{1}{13}$, y halle el valor de λ. [4]

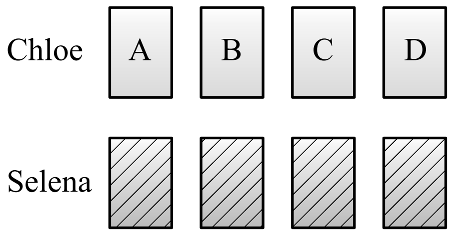
(d) Deduzca una expresión para $\vec{\mathrm{CD}}$ en función únicamente de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. [2]

(e) Sabiendo que área $\Delta\mathrm{OAB} = k$(área $\Delta\mathrm{CAD}$), halle el valor de k. [5]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 11]

Chloe y Selena juegan a un juego en el que cada una tiene cuatro cartas donde aparecen las letras mayúsculas A, B, C y D.
Chloe coloca sus cartas boca arriba en la mesa en el orden A, B, C, D, tal y como muestra la siguiente figura.



Selena baraja sus cartas y las coloca boca abajo en la mesa. A continuación las va dando la vuelta, de una en una, para ver si su carta coincide con la carta de Chloe que está situada justo encima de la suya.
Chloe gana si **no** hay ninguna coincidencia; en caso contrario es Selena quien gana.

(a) Muestre que la probabilidad de que Chloe gane el juego es igual a $\frac{3}{8}$. [6]

Chloe y Selena repiten el juego una y otra vez; en total juegan 50 veces.
Sea X la variable aleatoria discreta que representa el número de veces que Chloe gana.

(b) Determine

(i) la media de X;

(ii) la varianza de X. [5]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 21]

Considere la función $f_n(x) = (\cos 2x)(\cos 4x)\ldots(\cos 2^n x)$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Determine si f_n es una función impar o par, y justifique su respuesta. [2]

(b) Utilizando la inducción matemática, demuestre que

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1} x}{2^n \operatorname{sen} 2x},\ x \neq \frac{m\pi}{2} \text{ donde } m \in \mathbb{Z}.$$ [8]

(c) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión para la derivada de $f_n(x)$ con respecto a x. [3]

(d) Muestre que, para $n > 1$, la ecuación de la tangente a la curva $y = f_n(x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$ es $4x - 2y - \pi = 0$. [8]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.