



International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Matemáticas

Nivel Superior

Exámenes de muestra 1, 2 y 3

(adaptación del examen de noviembre de 2014)

Para primeros exámenes en 2017

CONTENIDO

Matemáticas nivel superior prueba 1 examen de muestra

Matemáticas nivel superior prueba 1 esquema de calificación

Matemáticas nivel superior prueba 2 examen de muestra

Matemáticas nivel superior prueba 2 esquema de calificación

Matemáticas nivel superior prueba 3 discretas examen de muestra

Matemáticas nivel superior prueba 3 discretas esquema de calificación

Matemáticas nivel superior prueba 3 análisis examen de muestra

Matemáticas nivel superior prueba 3 análisis esquema de calificación

Matemáticas nivel superior prueba 3 conjuntos, relaciones y grupos examen de muestra

Matemáticas nivel superior prueba 3 conjuntos, relaciones y grupos esquema de calificación

Matemáticas nivel superior prueba 3 estadística y probabilidad examen de muestra

Matemáticas nivel superior prueba 3 estadística y probabilidad esquema de calificación

Matemáticas

Nivel superior

Prueba 1

EXAMEN DE MUESTRA (adaptación del examen de noviembre de 2014)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.



8. [Puntuación máxima: 7]

El conjunto de números enteros positivos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es utilizado para formar una baraja de nueve cartas. Cada carta muestra un número entero positivo de este conjunto, sin repetición. Grace desea elegir al azar cuatro cartas de esta baraja de nueve cartas.

(a) Halle el número de selecciones que puede realizar Grace si el mayor número entero de entre las cuatro cartas tomadas de la baraja es el 5, el 6 o el 7. [3]

(b) Halle el número de selecciones que puede realizar Grace si al menos dos de los cuatro números enteros tomados de la baraja son pares. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



NO escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 17]

La función f viene dada por $f(x) = e^{3x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $f^{-1}(x)$. [3]

La función g viene dada por $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.

El gráfico de $y = g(x)$ corta al eje x en el punto Q .

(b) Muestre que la ecuación de la tangente T al gráfico de $y = g(x)$ en el punto Q es $y = x - 1$. [3]

Una región R está delimitada por el gráfico de $y = g(x)$, la tangente T y la recta $x = e$.

(c) Halle el área de la región R . [5]

(d) (i) Muestre que $g(x) \leq x - 1$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Sustituyendo x por $\frac{1}{x}$ en el apartado (d)(i), muestre que $\frac{x-1}{x} \leq g(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. [6]

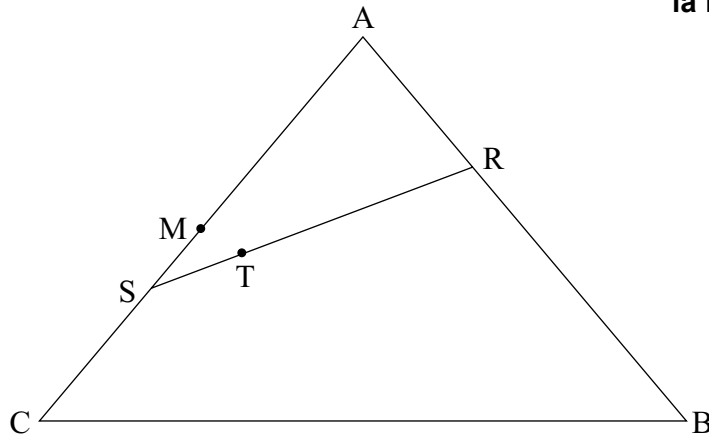


NO escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 14]

Los vectores de posición de los puntos A, B y C con relación al origen O son, respectivamente, \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} . La siguiente figura muestra el triángulo ABC y los puntos M, R, S y T.

la figura no está dibujada a escala



M es el punto medio de [AC].

R es un punto perteneciente a [AB] tal que $\vec{AR} = \frac{1}{3} \vec{AB}$.

S es un punto perteneciente a [AC] tal que $\vec{AS} = \frac{2}{3} \vec{AC}$.

T es un punto perteneciente a [RS] tal que $\vec{RT} = \frac{2}{3} \vec{RS}$.

(a) (i) Exprese \vec{AM} en función de \mathbf{a} y \mathbf{c} .

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $\vec{BM} = \frac{1}{2} \mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c}$. [4]

(b) (i) Exprese \vec{RA} en función de \mathbf{a} y \mathbf{b} .

(ii) Muestre que $\vec{RT} = -\frac{2}{9} \mathbf{a} - \frac{2}{9} \mathbf{b} + \frac{4}{9} \mathbf{c}$. [5]

(c) Demuestre que T pertenece a [BM]. [5]



NO escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 19]

(a) Muestre que $(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = \frac{2 \cos n \theta}{\cos^n \theta}$, $\cos \theta \neq 0$. [6]

(b) (i) Utilice la identidad del ángulo doble $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ para mostrar que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

(ii) Muestre que $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

(iii) A partir de lo anterior, halle el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2 \cos 4x}{\cos^2 x} dx$. [13]



Esquema de calificación

Examen de muestra
(adaptación del examen de noviembre de 2014)

Matemáticas

Nivel Superior

Prueba 1

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento (es decir, el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de los puntos **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando no se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Se deberá calificar siguiendo las instrucciones que aparecen en RM™ Assessor y conforme al documento “**Matemáticas NS: Orientación para la calificación electrónica (e-marking) de mayo de 2016**”. Es vital que lea este documento antes de empezar a corregir y a calificar. En particular, tenga presente lo siguiente:

- Las puntuaciones deben quedar registradas utilizando los sellos de anotación. Por favor, compruebe que está dejando registrados los puntos para la pregunta que efectivamente está corrigiendo.
- Si hay un apartado que sea **totalmente correcto** (y que haya obtenido todos los puntos que requieren la evidencia de un procedimiento explícito), utilice los tics con números para poner el sello correspondiente a la puntuación máxima.
- Si hay un apartado que esté todo mal, ponga el sello **A0** junto a la respuesta final.
- Si un apartado obtiene una puntuación intermedia, esta **debe** quedar registrada utilizando **todas** las anotaciones.
- RM™ Assessor sumará los puntos obtenidos y los registrará.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes, de haber alguno.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida los puntos.

- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional correcto. Sin embargo, si el desarrollo adicional revela falta de comprensión matemática, no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla puede presentarse en las respuestas numéricas, donde un valor exacto correcto viene seguido de un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se utiliza luego en un apartado posterior y se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error, conceda los puntos **FT** (del inglés *follow through*) que corresponda pero no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones **N**

Conceda puntos **N** por respuestas **correctas** que **no** vengán acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos **N** y de otro tipo de puntuación.
- Puede ocurrir que haya menos puntos **N** que el total de puntos **M**, **A** y **R**; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (**M1**). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando haya **evidencia explícita** del procedimiento seguido.

5 Puntuación de arrastre de error (**FT**)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), debe haber **evidencia explícita del procedimiento empleado** para obtener la respuesta (no tan solo una respuesta final basada en la respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido en el apartado anterior, la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos **FT**.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

- Dentro de un apartado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo **A que dependa del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos **M** si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR, del inglés misread). A un alumno solo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello MR para indicar que se ha producido un error de lectura. A continuación, no conceda el primero de los puntos que corresponda conceder —aunque se trate de puntos M— pero conceda todas los puntos restantes, de modo que el alumno solo pierda un punto.

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos.
- Si este error de lectura (**MR**) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

7 Puntuación discrecional (d)

*En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación apropiada. En esos casos se ha de utilizar la anotación DM y, al lado de la puntuación, se ha de escribir una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.*

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se han de puntuar en sintonía con lo que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con el jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados mediante los encabezamientos **METHOD 1**, **METHOD 2 (MÉTODO 1, MÉTODO 2)**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **EITHER... OR (O BIEN... O BIEN)**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas alternativas.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos suelen no incluir en los exámenes) normalmente aparecen escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (de habérsela incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x-3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x-3))5 \quad (=10\cos(5x-3)) \quad \mathbf{A1}$$

Se ha de conceder **A1** por $(2\cos(5x-3))5$, aun cuando el alumno no lo haya simplificado luego a $10\cos(5x-3)$.

10 Precisión de las respuestas

A los alumnos **YA NO** se les va a penalizar por los errores de precisión (**AP**, del inglés Accuracy Penalty) cometidos.

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, el esquema asignará un punto a la respuesta dada con la precisión requerida. Cuando esto no se especifique en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas se tendrán que dar exactas o con una aproximación de tres cifras significativas. Por favor, revise cuidadosamente el procedimiento del alumno por si hubiera arrastre de error.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

No se permite el uso de calculadoras. El uso de cualquier tipo de calculadora durante la prueba 1 se considera conducta impropia y, como consecuencia de ello, no se concederá ninguna calificación final. Si se topa con un ejercicio que sugiera que el alumno ha utilizado algún tipo de calculadora, siga por favor los procedimientos establecidos para abordar la conducta impropia. Ejemplos: hallar un ángulo a partir de una razón trigonométrica de 0,4235.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador solamente ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

14 Respuestas del alumno

Se supone que los alumnos han de escribir las respuestas a las preguntas de la Sección A en el cuestionario de examen (CE), y las de la Sección B en los cuadernillos de respuestas. En ocasiones los alumnos necesitan más espacio para la Sección A y utilizan el cuadernillo (y con frecuencia así lo indican en el CE) o escriben fuera de las casillas. Este desarrollo hay que calificarlo.

En las instrucciones se les dice a los alumnos que no han de escribir en la Sección B del CE. Así, es posible que hayan utilizado este espacio como hoja borrador, para hacer cálculos que dan por hecho se van a ignorar. Si han escrito soluciones en el cuadernillo de respuestas, no hay necesidad de mirar el CE. Sin embargo, si hay preguntas enteras o apartados enteros que no aparezcan resueltos en el cuadernillo de respuestas, por favor eche un vistazo al CE y compruebe que no estén resueltos ahí. En caso de que lo estén, puntúe esas preguntas enteras o esos apartados enteros que el alumno no escribió en el cuadernillo de respuesta.

Sección A

1. (a) $g(x) = \frac{1}{x+3} + 1$ **A1A1**

Nota: Conceda **A1** por $x+3$ en el denominador y **A1** por el "+1".

[2 puntos]

(b) $x = -3$ **A1**
 $y = 1$ **A1**

[2 puntos]

Total [4 puntos]

2. (a) por utilizar las fórmulas de la suma y del producto de raíces:

(i) $\alpha + \beta = 4$ **A1**

(ii) $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ **A1**

Nota: Conceda **A0A0** si los anteriores resultados se han obtenido resolviendo la ecuación original (exceptuando que se haya hecho a modo de comprobación).

[2 puntos]

(b) **MÉTODO 1**

la expresión cuadrática que se requiere es de la forma

$$x^2 - \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)x + \left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{2}{\beta}\right)$$
(M1)

$$q = \frac{4}{\alpha\beta}$$

$$q = 8$$
A1

$$p = -\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)$$

$$= -\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}$$
M1

$$= -\frac{2 \times 4}{1}$$

$$p = -16$$
A1

Nota: Acepte el uso de raíces exactas.

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 2

MÉTODO 2

por sustituir x por $\frac{2}{x}$

M1

$$2\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x} + 1 = 0$$

(A1)

$$x^2 - 16x + 8 = 0$$

$$p = -16 \text{ y } q = 8$$

A1A1

Nota: Conceda **A1A0** por $x^2 - 16x + 8 = 0$; es decir, si no se ha indicado explícitamente que $p = -16$ y $q = 8$.

[4 puntos]

Total [6 puntos]

3. (a) $\left|\vec{OP}\right|^2 = (1+s)^2 + (3+2s)^2 + (1-s)^2$
 $= 6s^2 + 12s + 11$

A1

AG

[1 punto]

(b) por intentar derivar: $\frac{d}{ds}\left|\vec{OP}\right|^2 (= 12s + 12)$

M1

por intentar resolver: $\frac{d}{ds}\left|\vec{OP}\right|^2 = 0$ en s

(M1)

$$s = -1$$

A1

la longitud mínima de \vec{OP} es $\sqrt{5}$

A1

[4 puntos]

(c) (El punto P está restringido a una recta)
 en una recta hay un único punto de máximo acercamiento al origen,
 pero no hay ningún punto de máximo alejamiento

R1

[1 punto]

Total [6 puntos]

4. (a) (i) por utilizar $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(M1)**
 $P(A \cup B) = 0,2 + 0,5$
 $= 0,7$ **A1**
- (ii) por utilizar $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ **(M1)**
 $P(A \cup B) = 0,2 + 0,5 - 0,1$
 $= 0,6$ **A1**
- [4 puntos]**
- (b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A|B)$ alcanza un mínimo cuando $A \cap B = \phi$ ($P(A \cap B) = 0$) **R1**
 $P(A|B)$ alcanza un máximo cuando $A \subseteq B$ ($P(A \cap B) = P(A)$) **R1**
 valor mín. = 0, valor máx. = 0,4 **A1**
- [3 puntos]**
- Total [7 puntos]**

5. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **A1**
 $dx = 2(u-1)du$

Nota: Conceda el **A1** por cualquier relación entre dx y du que sea correcta.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{(u-1)^2}{u} du$$
(M1)A1

Nota: Conceda el **M1** por un intento de sustitución que dé como resultado una integral en función de u únicamente.

$$= 2 \int u - 2 + \frac{1}{u} du$$
(A1)

$$= u^2 - 4u + 2 \ln u (+C)$$
A1

$$= x - 2\sqrt{x} - 3 + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) (+C)$$
A1

Nota: Conceda el **A1** por una expresión en x que sea correcta, aunque no esté totalmente desarrollada/simplificada.

[6 puntos]

6. sea $P(n)$ la proposición de que $(2n)! \geq 2^n (n!)^2 \quad n \in \mathbb{Z}^+$.
 tomando $P(1)$:

$2! = 2$ y $2^1 (1!)^2 = 2$, por lo que $P(1)$ es verdadera **R1**

suponemos que $P(k)$ es verdadera; es decir, $(2k)! \geq 2^k (k!)^2, k \in \mathbb{Z}^+$ **M1**

Nota: No conceda **M1** por enunciados del tipo "sea $n = k$ ".

tomando $P(k+1)$:

$(2(k+1))! = (2k+2)(2k+1)(2k)!$ **M1**

$(2(k+1))! \geq (2k+2)(2k+1)(k!)^2 2^k$ **A1**

Nota: Acepte hasta este punto aquellos cálculos hechos "al revés" (hacia atrás), pero ya no los acepte a partir de aquí a no ser que esté plenamente justificado.

$= 2(k+1)(2k+1)(k!)^2 2^k$

$> 2^{k+1} (k+1)(k+1)(k!)^2$ puesto que $2k+1 > k+1$ **R1**

$= 2^{k+1} ((k+1)!)^2$ **A1**

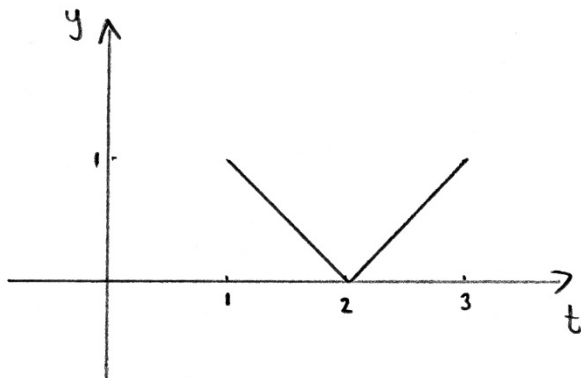
$P(k+1)$ es verdadera siempre que $P(k)$ verdadera, y $P(1)$ es verdadera;

por lo tanto, $P(n)$ es verdadera para $n \in \mathbb{Z}^+$. **R1**

Nota: Para obtener el **R1** final es necesario que se hayan concedido cuatro de los puntos anteriores.

[7 puntos]

7. (a)



$|2-t|$ correcto para $[1, 2]$

A1

$|2-t|$ correcto para $[2, 3]$

A1

[2 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 7

(b) (i) sea q_1 el primer cuartil

por considerar $\int_1^{q_1} (2 - t) dt = \frac{1}{4}$ **M1A1**

por obtener $q_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ **A1**

(ii) por simetría; por ejemplo, $q_3 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ **A1**

a partir de lo anterior, $RIC = \sqrt{2}$ **A1**

Nota: Para conceder **A1**, acepte únicamente esto como respuesta final.

[5 puntos]

Total [7 puntos]

8. (a) por utilizar el principio de la suma con 3 términos **(M1)**
 para así obtener ${}^4C_3 + {}^5C_3 + {}^6C_3$ ($= 4 + 10 + 20$) **A1**
 el número de selecciones posibles es 34 **A1**

[3 puntos]

(b) **O BIEN**

ha identificado tres casos distintos: (2 impares y 2 pares o 1 impar y 3 pares o 0 impares y 4 pares) **(M1)**
 $({}^5C_2 \times {}^4C_2) + ({}^5C_1 \times {}^4C_3) + ({}^5C_0 \times {}^4C_4) (= 60 + 20 + 1)$ **(M1)A1**

O BIEN:

ha propuesto restar la suma de 4 impares y 3 impares y 1 par del total **(M1)**
 ${}^9C_4 - {}^5C_4 - ({}^5C_3 \times {}^4C_1) (= 126 - 5 - 40)$ **(M1)A1**

LUEGO

el número de selecciones posibles es 81 **A1**

[4 puntos]

Total [7 puntos]

Sección B

9. (a) $x = e^{3y+1}$ **M1**

Notas: El **M1** es por cambiar de variable y se puede conceder en cualquier paso del desarrollo. El resto de puntos no dependen de que esta puntuación se haya concedido o no.

por tomar el logaritmo neperiano a ambos lados y por tratar de despejar **M1**

$$(f^{-1}(x)) = \frac{1}{3}(\ln x - 1)$$
A1

[3 puntos]

(b) por indicar en algún lugar del ejercicio que las coordenadas de Q son (1, 0) **A1**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$
M1

en Q, $\frac{dy}{dx} = 1$ **A1**

$$y = x - 1$$
AG

[3 puntos]

(c) sea A el área que se pide

$$A = \int_1^e x - 1 dx - \int_1^e \ln x dx$$
M1

Notas: El **M1** se concede por la resta de integrales. No penalice la falta de límites en este paso.

por tratar de utilizar la integración por partes para hallar $\int \ln x dx$ **(M1)**

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e - [x \ln x - x]_1^e$$
A1A1

Nota: Conceda **A1** por $\frac{x^2}{2} - x$ y **A1** por $x \ln x - x$.

Nota: El segundo **M1** y el segundo **A1** son independientes del primer **M1** y del primer **A1**.

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} \left(= \frac{e^2 - 2e - 1}{2} \right)$$
A1

[5 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 9

(d) (i) **MÉTODO 1**

por considerar, por ejemplo $h(x) = x - 1 - \ln x$

$h(1) = 0$ y $h'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ **(A1)**

como $h'(x) \geq 0$ para $x \geq 1$, entonces

$h(x) \geq 0$ para $x \geq 1$ **R1**

como $h'(x) \leq 0$ para $0 < x \leq 1$, entonces $h(x) \geq 0$

para $0 < x \leq 1$ **R1**

por lo que $g(x) \leq x - 1, x \in \mathbb{R}^+$ **AG**

MÉTODO 2

$g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ **A1**

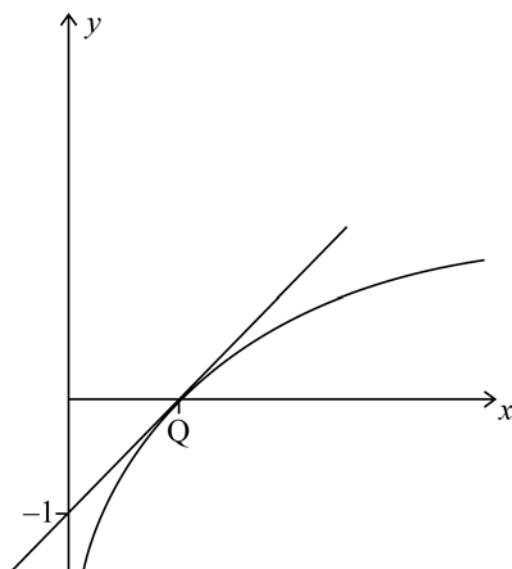
$g''(x) < 0$ (cóncava hacia abajo) para $x \in \mathbb{R}^+$ **R1**

el gráfico de $y = g(x)$ está por debajo de la tangente ($y = x - 1$ en $x = 1$)

así pues, $g(x) \leq x - 1, x \in \mathbb{R}^+$ **AG**

Nota: El razonamiento puede estar respaldado por argumentos de tipo gráfico.

MÉTODO 3



gráficos claros y correctos de $y = x - 1$ y de $\ln x$ para $x > 0$ **A1A1**

por una afirmación que señale que el gráfico de $\ln x$ está por debajo del gráfico de su tangente en $x = 1$ **R1AG**

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 9

(ii) por sustituir x por $\frac{1}{x}$ para así obtener $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1 \left(= \frac{1-x}{x}\right)$ **M1**

$$-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \left(= \frac{1-x}{x}\right)$$
(A1)

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x} \left(= \frac{x-1}{x}\right)$$
A1

por lo que $\frac{x-1}{x} \leq g(x), x \in \mathbb{R}^+$ **AG**

[6 puntos]

Total [17 puntos]

10. (a) (i) $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ **(M1)**

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$
A1

(ii) $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM}$ **M1**

$$= \mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$
A1

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$$
AG

[4 puntos]

(b) (i) $\vec{RA} = \frac{1}{3}\vec{BA}$

$$= \frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$
A1

(ii) $\vec{RT} = \frac{2}{3}\vec{RS}$

$$= \frac{2}{3}(\vec{RA} + \vec{AS})$$
(M1)

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{2}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{a})\right) \text{ o equivalente}$$
A1A1

$$= \frac{2}{9}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{4}{9}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$
A1

$$\vec{RT} = -\frac{2}{9}\mathbf{a} - \frac{2}{9}\mathbf{b} + \frac{4}{9}\mathbf{c}$$
AG

[5 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 10

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \vec{BT} &= \vec{BR} + \vec{RT} \\
 &= \frac{2}{3}\vec{BA} + \vec{RT} && \text{(M1)} \\
 &= \frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{2}{9}\mathbf{a} - \frac{2}{9}\mathbf{b} + \frac{4}{9}\mathbf{c} && \text{A1} \\
 \vec{BT} &= \frac{8}{9}\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right) && \text{A1}
 \end{aligned}$$

el punto B es común a \vec{BT} y a \vec{BM} ; además, $\vec{BT} = \frac{8}{9}\vec{BM}$ R1R1

con lo que T pertenece a [BM] AG

[5 puntos]

Total [14 puntos]

11. (a) **MÉTODO 1**

$$(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = \left(1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^n + \left(1 - i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^n \quad \text{M1}$$

$$= \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^n + \left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^n \quad \text{A1}$$

por el teorema de de Moivre (M1)

$$\left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^n = \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{\cos^n \theta} \quad \text{A1}$$

por darse cuenta de que $\cos \theta - i \sin \theta$ es el número complejo conjugado de $\cos \theta + i \sin \theta$ (R1)

por utilizar el hecho de que la operación de conjugación de números complejos conmuta con la operación de elevar a una potencia entera:

$$\left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta}\right)^n = \frac{\cos n\theta - i \sin n\theta}{\cos^n \theta} \quad \text{A1}$$

$$(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = \frac{2 \cos n\theta}{\cos^n \theta} \quad \text{AG}$$

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 11

MÉTODO 2

$$(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = (1 + i \tan \theta)^n + (1 + i \tan(-\theta))^n \quad (M1)$$

$$= \frac{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n}{\cos^n \theta} + \frac{(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))^n}{\cos^n \theta} \quad M1A1$$

Nota: Conceda **M1** por convertir la expresión a otra con cosenos y senos.

por utilizar el teorema de de Moivre (M1)

$$= \frac{1}{\cos^n \theta} (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta + \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)) \quad A1$$

$$= \frac{2 \cos n\theta}{\cos^n \theta} \text{ dado que } \cos(-n\theta) = \cos n\theta \text{ y } \operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen} n\theta \quad R1AG$$

[6 puntos]

(b) (i) $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \quad (M1)$

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \quad A1$$

sea $t = \tan \frac{\pi}{8}$

por tratar de resolver $t^2 + 2t - 1 = 0$ en t M1

$$t = -1 \pm \sqrt{2} \quad A1$$

$\frac{\pi}{8}$ es un ángulo del primer cuadrante y la tangente es positiva en este cuadrante,

con lo que $\tan \frac{\pi}{8} > 0$ R1

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \quad AG$$

(ii) $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 \quad A1$

$$= 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 \quad M1$$

$$= 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 \quad A1$$

$$= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \quad AG$$

Nota: Acepte un desarrollo equivalente mediante números complejos.

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 11

$$(iii) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2 \cos 4x}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{8}} 8 \cos^2 x - 8 + \sec^2 x dx$$

M1

Nota: El **M1** es por un integrando que no incluya fracciones.

por utilizar $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

M1

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{8}} 4 \cos 2x - 4 + \sec^2 x dx$$

A1

$$= [4 \operatorname{sen} 2x - 8x + 2 \tan x]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

A1

$$= 4\sqrt{2} - \pi - 2 \text{ (o equivalente)}$$

A1

[13 puntos]

Total [19 puntos]

Matemáticas

Nivel superior

Prueba 2

EXAMEN DE MUESTRA (adaptación del examen de noviembre de 2014)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

Considere los dos planos

$$\pi_1 : 4x + 2y - z = 8$$

$$\pi_2 : x + 3y + 3z = 3.$$

Halle el ángulo que forman π_1 y π_2 , aproximado al número entero de grados más próximo.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 6]

Las envergaduras de las aves de una determinada especie se pueden modelizar por una distribución normal, de media 60,2 cm y desviación típica 2,4 cm.

Según este modelo, el 99% de las aves tienen una envergadura mayor que x cm.

(a) Halle el valor de x . [2]

En un experimento de campo, un equipo de investigación estudia una amplia muestra de estas aves. Miden la envergadura de cada ave, aproximada al múltiplo de 0,1 cm más próximo.

(b) Halle la probabilidad de que un ave elegida al azar tenga una envergadura medida de 60,2 cm. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Puntuación máxima: 8]

Las rectas l_1 y l_2 vienen dadas por

$$l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-2}$$

$$l_2: \frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-12}{6}.$$

El plano π contiene a l_1 y también a l_2 .

(a) Halle la ecuación cartesiana de π . [4]

La recta l_3 pasa por el punto $(4, 0, 8)$ y es perpendicular a π .

(b) Halle las coordenadas del punto en el que l_3 corta a π . [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 6]

Considere $p(x) = 3x^3 + ax + 5a$, $a \in \mathbb{R}$.

Cuando el polinomio $p(x)$ se divide entre $(x - a)$, el resto es igual a -7 .

Muestre que solo hay un valor de a que satisfaga la condición anterior e indique dicho valor.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 9]

El séptimo, el tercer y el primer término de una progresión aritmética constituyen los tres primeros términos de una progresión geométrica.

En la progresión aritmética, el primer término es a y la diferencia común, no nula, es d .

(a) Muestre que $d = \frac{a}{2}$. [3]

El séptimo término de la progresión aritmética es 3. La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética supera a la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica por al menos 200.

(b) Halle el menor valor de n para el cual sucede esto. [6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Puntuación máxima: 7]

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que su velocidad, $v \text{ m s}^{-1}$, en el instante t segundos viene dada por

$$v(t) = \begin{cases} 5 - (t - 2)^2, & 0 \leq t \leq 4 \\ 3 - \frac{t}{2}, & t > 4 \end{cases} .$$

(a) Halle el valor de t para el cual la partícula se encuentra momentáneamente en reposo. [2]

La partícula vuelve a su posición inicial en $t = T$.

(b) Halle el valor de T . [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 8]

La compactibilidad es una propiedad que indica cuán compacta es una región cerrada.

La compactibilidad C de una región cerrada se puede definir mediante $C = \frac{4A}{\pi d^2}$, donde A es el área de la región y d es la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera de la región.

En el caso de una región circular, $C = 1$.

Considere un polígono regular de n lados construido de manera tal que los vértices pertenecen a la circunferencia de un círculo de diámetro x unidades.

(a) Si $n > 2$ y par, muestre que $C = \frac{n}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$. [3]

Si $n > 1$ e impar, se puede mostrar que $C = \frac{n \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\pi \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right)}$.

(b) Halle el polígono regular con el menor número de lados para el que la compactibilidad es mayor que 0,99. [4]

(c) Comente brevemente sobre si C es una buena medida de la compactibilidad. [1]



NO escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

8. [Puntuación máxima: 12]

Considere el triángulo PQR, donde $\hat{Q}PR = 30^\circ$, $PQ = (x + 2)$ cm y $PR = (5 - x)^2$ cm, donde $-2 < x < 5$.

(a) Muestre que el área del triángulo, A cm², viene dada por $A = \frac{1}{4}(x^3 - 8x^2 + 5x + 50)$. [2]

(b) (i) Indique $\frac{dA}{dx}$.

(ii) Verifique que $\frac{dA}{dx} = 0$ para $x = \frac{1}{3}$. [3]

(c) (i) Halle $\frac{d^2A}{dx^2}$ y, a partir de lo anterior, justifique que el área máxima del triángulo PQR se obtiene cuando $x = \frac{1}{3}$.

(ii) Indique el área máxima del triángulo PQR.

(iii) Halle QR cuando el área del triángulo PQR alcanza su valor máximo. [7]



NO escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 10]

El número de quejas que recibe cada día el servicio de atención al cliente de una tienda por departamentos sigue una distribución de Poisson de media 0,6.

- (a) En un día elegido al azar, halle la probabilidad de que
 - (i) no haya ninguna queja;
 - (ii) haya al menos tres quejas. [3]
- (b) En una semana de cinco días elegida al azar, halle la probabilidad de que no se reciba ninguna queja. [2]
- (c) En un día elegido al azar, halle el número más probable de quejas que se reciben. Justifique su respuesta. [3]

Esta tienda por departamentos introduce una nueva normativa para mejorar el servicio de atención al cliente. El número de quejas que recibe cada día el servicio de atención al cliente ahora sigue una distribución de Poisson de media λ .

En un día elegido al azar, la probabilidad de que no se reciba ninguna queja es ahora igual a 0,8.

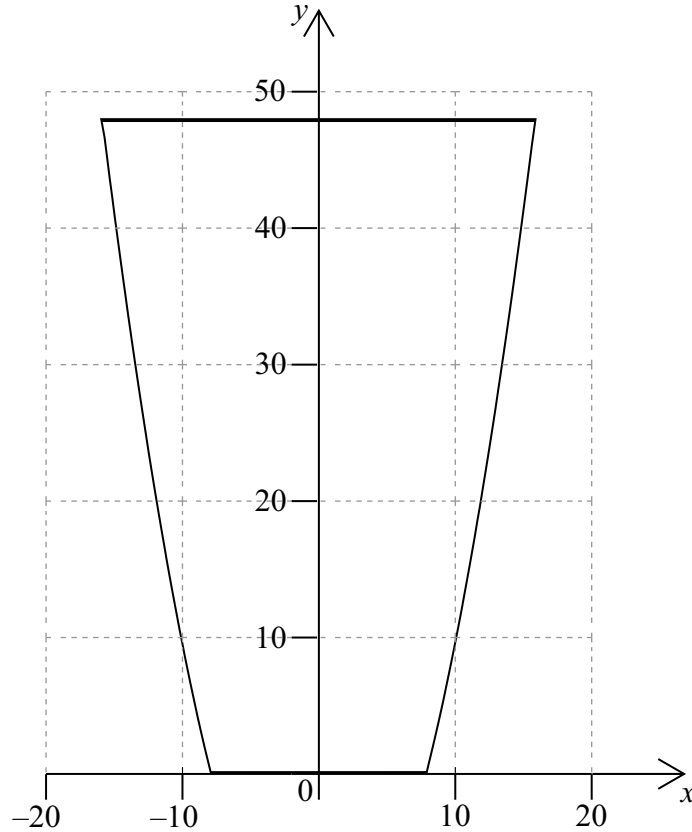
- (d) Halle el valor de λ . [2]



NO escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 17]

En la siguiente figura se muestra la sección transversal vertical de un contenedor.



Los lados curvos de dicha sección transversal vienen dados por la ecuación $y = 0,25x^2 - 16$. Las secciones transversales horizontales son circulares. El contenedor tiene una altura de 48 cm.

- (a) Si el contenedor se llena de agua hasta una altura de h cm, muestre que el volumen del agua, V cm³, viene dado por $V = 4\pi \left(\frac{h^2}{2} + 16h \right)$.

[3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



NO escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

El contenedor, que inicialmente está lleno de agua, empieza a gotear a través de un pequeño agujero a una razón que viene dada por $\frac{dV}{dt} = -\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}$ donde t se mide en segundos.

(b) (i) Muestre que $\frac{dh}{dt} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$.

(ii) Indique $\frac{dt}{dh}$ y, a partir de lo anterior, muestre que

$$t = \frac{-4\pi^2}{250} \int \left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}} \right) dh.$$

(iii) Halle el tiempo que tarda en vaciarse el contenedor, aproximado al número entero de minutos más próximo. (60 segundos = 1 minuto)

[11]

Una vez que está vacío, se vuelve a echar agua en el contenedor a una razón de $8,5 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Simultáneamente, el contenedor sigue goteando a una razón de $\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

(c) Utilizando un gráfico aproximado apropiado, determine la altura a la que acaba estabilizándose el nivel del agua en el contenedor.

[3]



NO escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 11]

En el triángulo ABC ,

$$3 \operatorname{sen} B + 4 \operatorname{cos} C = 6 \text{ y}$$

$$4 \operatorname{sen} C + 3 \operatorname{cos} B = 1.$$

(a) Muestre que $\operatorname{sen}(B+C) = \frac{1}{2}$. [6]

Robert conjetura que $\hat{C}\hat{A}\hat{B}$ puede tener dos valores posibles.

(b) Muestre que la conjetura de Robert es incorrecta, demostrando que $\hat{C}\hat{A}\hat{B}$ tiene solo un valor posible. [5]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP15

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16

Esquema de calificación

Examen de muestra
(adaptación del examen de noviembre de 2014)

Matemáticas

Nivel Superior

Prueba 2

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento (es decir, el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de los puntos **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando no se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Se deberá calificar siguiendo las instrucciones que aparecen en RM™ Assessor y conforme al documento “**Matemáticas NS: Orientación para la calificación electrónica (e-marking) de mayo de 2016**”. Es vital que lea este documento antes de empezar a corregir y a calificar. En particular, tenga presente lo siguiente:

- Las puntuaciones deben quedar registradas utilizando los sellos de anotación. Por favor, compruebe que está dejando registrados los puntos para la pregunta que efectivamente está corrigiendo.
- Si hay un apartado que sea **totalmente correcto** (y que haya obtenido todos los puntos que requieren la evidencia de un procedimiento explícito), utilice los tics con números para poner el sello correspondiente a la puntuación máxima.
- Si hay un apartado que esté todo mal, ponga el sello **A0** junto a la respuesta final.
- Si un apartado obtiene una puntuación intermedia, esta **debe** quedar registrada utilizando **todas** las anotaciones.
- RM™ Assessor sumará los puntos obtenidos y los registrará.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes, de haber alguno.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida los puntos.

- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional correcto. Sin embargo, si el desarrollo adicional revela falta de comprensión matemática, no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla puede presentarse en las respuestas numéricas, donde un valor exacto correcto viene seguido de un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se utiliza luego en un apartado posterior y se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error, conceda los puntos **FT** (del inglés *follow through*) que corresponda pero no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones **N**

Conceda puntos **N** por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos **N** y de otro tipo de puntuación.
- Puede ocurrir que haya menos puntos **N** que el total de puntos **M**, **A** y **R**; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (**M1**). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando haya **evidencia explícita** del procedimiento seguido.

5 Puntuación de arrastre de error (**FT**)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), debe haber **evidencia explícita del procedimiento empleado** para obtener la respuesta (no tan solo una respuesta final basada en la respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido en el apartado anterior, la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos **FT**.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

- Dentro de un apartado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo **A que dependa del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos **M** si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR, del inglés misread). A un alumno solo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello MR para indicar que se ha producido un error de lectura. A continuación, no conceda el primero de los puntos que corresponda conceder —aunque se trate de puntos M— pero conceda todas los puntos restantes, de modo que el alumno solo pierda un punto.

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos.
- Si este error de lectura (**MR**) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen}\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

7 Puntuación discrecional (d)

*En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación apropiada. En esos casos se ha de utilizar la anotación DM y, al lado de la puntuación, se ha de escribir una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.*

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se han de puntuar en sintonía con lo que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con el jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados mediante los encabezamientos **METHOD 1**, **METHOD 2 (MÉTODO 1, MÉTODO 2)**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **EITHER... OR (O BIEN... O BIEN)**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas alternativas.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos suelen no incluir en los exámenes) normalmente aparecen escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (de habérsela incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x-3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x-3))5 \quad (=10\cos(5x-3)) \quad \mathbf{A1}$$

Se ha de conceder **A1** por $(2\cos(5x-3))5$, aun cuando el alumno no lo haya simplificado luego a $10\cos(5x-3)$.

10 Precisión de las respuestas

A los alumnos **YA NO** se les va a penalizar por los errores de precisión (**AP**, del inglés Accuracy Penalty) cometidos.

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, el esquema asignará un punto a la respuesta dada con la precisión requerida. Cuando esto no se especifique en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas se tendrán que dar exactas o con una aproximación de tres cifras significativas. Por favor, revise cuidadosamente el procedimiento del alumno por si hubiera arrastre de error.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 2 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la de las calculadoras. **No** acepte respuestas finales que estén escritas con notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador solamente ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

14 Respuestas del alumno

Se supone que los alumnos han de escribir las respuestas a las preguntas de la Sección A en el cuestionario de examen (CE), y las de la Sección B en los cuadernillos de respuestas. En ocasiones los alumnos necesitan más espacio para la Sección A y utilizan el cuadernillo (y con frecuencia así lo indican en el CE) o escriben fuera de las casillas. Este desarrollo hay que calificarlo.

En las instrucciones se les dice a los alumnos que no han de escribir en la Sección B del CE. Así, es posible que hayan utilizado este espacio como hoja borrador, para hacer cálculos que dan por hecho se van a ignorar. Si han escrito soluciones en el cuadernillo de respuestas, no hay necesidad de mirar el CE. Sin embargo, si hay preguntas enteras o apartados enteros que no aparezcan resueltos en el cuadernillo de respuestas, por favor eche un vistazo al CE y compruebe que no estén resueltos ahí. En caso de que lo estén, puntúe esas preguntas enteras o esos apartados enteros que el alumno no escribió en el cuadernillo de respuesta.

Sección A

1. $n_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (A1)(A1)

por utilizar $\cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|}$ (M1)

$\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{21}\sqrt{19}} \left(= \frac{7}{\sqrt{399}} \right)$ (A1)(A1)

Nota: Conceda **A1** por un numerador correcto y **A1** por un denominador correcto.

$\theta = 69^\circ$ A1

Nota: Conceda **A1** por 111° .

[6 puntos]

2. (a) $P(X > x) = 0,99$ ($= P(X < x) = 0,01$) (M1)
 $\Rightarrow x = 54,6$ (cm) A1

[2 puntos]

(b) $P(60,15 \leq X \leq 60,25)$ (M1)(A1)(A1)
 $= 0,0166$ A1

[4 puntos]

Total [6 puntos]

3. (a) por tratar de hallar una normal a π ; p. ej., $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ (M1)

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = 17 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (A1)

$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ M1

$2x - 2y + z = 4$ (o equivalente) A1

[4 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 3

(b) $l_3: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ **(A1)**

por tratar de resolver $\begin{pmatrix} 4+2t \\ -2t \\ 8+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$ en t ; es decir,

$9t + 16 = 4$ en t **M1**

$t = -\frac{4}{3}$ **A1**

$\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$ **A1**

[4 puntos]

Total [8 puntos]

4. por utilizar $p(a) = -7$ para obtener $3a^3 + a^2 + 5a + 7 = 0$ **M1A1**
 $(a+1)(3a^2 - 2a + 7) = 0$ **(M1)(A1)**

Nota: Conceda **M1** por un gráfico cúbico que tenga la forma correcta y **A1** por mostrar claramente que el gráfico cúbico cruza el eje horizontal únicamente en $(-1, 0)$.

$a = -1$ **A1**

O BIEN

por mostrar que $3a^2 - 2a + 7 = 0$ no tiene ninguna solución real (tiene dos soluciones complejas) para a **R1**

O BIEN

por mostrar que $3a^3 + a^2 + 5a + 7 = 0$ tiene una solución real (y dos complejas) para a **R1**

Nota: Conceda **R1** por soluciones que hagan referencia explícita a un gráfico que sea adecuado.

Total [6 puntos]

5. (a) por utilizar $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$ para obtener $\frac{a + 2d}{a + 6d} = \frac{a}{a + 2d}$ **(M1)**
 $a(a + 6d) = (a + 2d)^2$ **A1**
 $2d(2d - a) = 0$ (o equivalente) **A1**
 dado que $d \neq 0 \Rightarrow d = \frac{a}{2}$ **AG**
[3 puntos]
- (b) por sustituir $d = \frac{a}{2}$ en $a + 6d = 3$ y resolver en a y d **(M1)**
 $a = \frac{3}{4}$ y $d = \frac{3}{8}$ **(A1)**
 $r = \frac{1}{2}$ **A1**
- $$\frac{n}{2} \left(2 \times \frac{3}{4} + (n - 1) \frac{3}{8} \right) - \frac{3 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} \geq 200$$
- (A1)**
-
- por tratar de resolver en
- n
- (M1)**
-
- $n \geq 31,68\dots$
-
- con lo que el menor valor de
- n
- es 32
- A1**
-
- [6 puntos]**
- Total [9 puntos]**

6. (a) $3 - \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow t = 6(\text{s})$ (M1)A1

[2 puntos]

Nota: Conceda **A0** si se ha dado como respuesta $t = -0,236$ o $t = 4,24$, o ambas, junto con $t = 6$.

(b) sea d la distancia que ha recorrido antes de detenerse

$$d = \int_0^4 5 - (t-2)^2 dt + \int_4^6 3 - \frac{t}{2} dt$$
 (M1)(A1)

Notas: Conceda **M1** por dos integrales correctas, incluso aunque los límites de integración sean incorrectos.
La segunda integral se puede especificar como el área de un triángulo.

$$d = \frac{47}{3} (=15,7)(\text{m})$$
 A1

por tratar de resolver $\int_6^T \left(\frac{t}{2} - 3 \right) dt = \frac{47}{3}$ (o equivalente) en T M1

$$T = 13,9(\text{s})$$
 A1

[5 puntos]

Total [7 puntos]

7. (a) el área de cada triángulo es $\frac{1}{8}x^2 \text{sen} \frac{2\pi}{n}$ (uso de $\frac{1}{2}ab \text{sen} C$) (M1)

como hay n triángulos, $A = \frac{1}{8}nx^2 \text{sen} \frac{2\pi}{n}$ A1

$$C = \frac{4 \left(\frac{1}{8}nx^2 \text{sen} \frac{2\pi}{n} \right)}{\pi x^2}$$
 A1

con lo que $C = \frac{n}{2\pi} \text{sen} \frac{2\pi}{n}$ AG

[3 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 7

(b) por tratar de hallar el menor valor de n tal que $\frac{n}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} > 0,99$ **(M1)**
 $n = 26$ **A1**

por tratar de hallar el menor valor de n tal que $\frac{n \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\pi \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right)} > 0,99$ **(M1)**
 $n = 21$ y, por tanto, un polígono regular de 21 lados **A1**

Nota: Conceda **(M0)A0(M1)A1** si no se ha planteado $\frac{n}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} > 0,99$ y sí se ha planteado

$$\text{correctamente } \frac{n \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\pi \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right)} > 0,99.$$

Conceda **(M1)A1(M0)A0** por $n = 26$.

[4 puntos]

(c) **O BIEN**

para valores pares e impares de n , el valor de C parece aumentar y aproximarse al valor límite del círculo ($C = 1$).

Es decir, a medida que n aumenta, las regiones poligonales se acercan más y más a la región circular que las delimita

R1

O BIEN

las diferencias entre los valores pares e impares de n ponen de manifiesto que esta no es una buena medida de la compactibilidad

R1

[1 punto]

Total [8 puntos]

Sección B

8. (a) por utilizar $A = \frac{1}{2}qr \text{ sen } \theta$ para obtener $A = \frac{1}{2}(x+2)(5-x)^2 \text{ sen } 30^\circ$ **M1**

$$= \frac{1}{4}(x+2)(25 - 10x + x^2)$$
A1

$$A = \frac{1}{4}(x^3 - 8x^2 + 5x + 50)$$
AG

[2 puntos]

(b) (i) $\frac{dA}{dx} = \frac{1}{4}(3x^2 - 16x + 5) \left(= \frac{1}{4}(3x - 1)(x - 5) \right)$ **A1**

(ii) **MÉTODO 1**

O BIEN

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{4} \left(3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 16 \left(\frac{1}{3} \right) + 5 \right) = 0$$
M1A1

O BIEN

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{4} \left(3 \left(\frac{1}{3} \right) - 1 \right) \left(\left(\frac{1}{3} \right) - 5 \right) = 0$$
M1A1

LUEGO

así pues, $\frac{dA}{dx} = 0$ en $x = \frac{1}{3}$ **AG**

MÉTODO 2

por resolver $\frac{dA}{dx} = 0$ en x **M1**

$$-2 < x < 5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$
A1

así pues, $\frac{dA}{dx} = 0$ para $x = \frac{1}{3}$ **AG**

MÉTODO 3

un gráfico correcto de $\frac{dA}{dx}$ en función de x **M1**

el gráfico muestra claramente que $\frac{dA}{dx} = 0$ para $x = \frac{1}{3}$ **A1**

así pues, $\frac{dA}{dx} = 0$ para $x = \frac{1}{3}$ **AG**

[3 puntos]

Continuación de la Pregunta 8

(c) (i) $\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{2}(3x-8)$ **A1**

para $x = \frac{1}{3}$, $\frac{d^2A}{dx^2} = -3,5 (< 0)$ **R1**

así pues, $x = \frac{1}{3}$ es el valor para el que el área del triángulo PQR es máxima **AG**

(ii) $A_{\max} = \frac{343}{27} (= 12,7) (\text{cm}^2)$ **A1**

(iii) $PQ = \frac{7}{3} (\text{cm})$ y $PR = \left(\frac{14}{3}\right)^2 (\text{cm})$ **(A1)**

$QR^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{14}{3}\right)^2 \cos 30^\circ$ **(M1)(A1)**

$= 391,702\dots$

$QR = 19,8 (\text{cm})$ **A1**

[7 puntos]

Total [12 puntos]

- 9.
- (a) (i) $P(X = 0) = 0,549 (= e^{-0,6})$ **A1**
- (ii) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ **(M1)**
 $P(X \geq 3) = 0,0231$ **A1**
[3 puntos]
- (b) **O BIEN**
 por utilizar $Y \sim \text{Po}(3)$ **(M1)**
- O BIEN**
 por utilizar $(0,549)^5$ **(M1)**
- LUEGO**
 $P(Y = 0) = 0,0498 (= e^{-3})$ **A1**
[2 puntos]
- (c) $P(X = 0)$ (el número más probable de quejas que se reciben es cero) **A1**
- O BIEN**
 por calcular $P(X = 0) = 0,549$ y $P(X = 1) = 0,329$ **M1A1**
- O BIEN**
 por dibujar aproximadamente un gráfico (discreto) apropiado de $P(X = x)$ en función de x **M1A1**
- O BIEN**
 por hallar $P(X = 0) = e^{-0,6}$ y por indicar que $P(X = 0) > 0,5$ **M1A1**
- O BIEN**
 por utilizar $P(X = x) = P(X = x - 1) \times \frac{\mu}{x}$, donde $\mu < 1$ **M1A1**
[3 puntos]
- (d) $P(X = 0) = 0,8 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0,8$ **(A1)**
 $\lambda = 0,223 \left(= \ln \frac{5}{4}, = -\ln \frac{4}{5} \right)$ **A1**
[2 puntos]
- Total [10 puntos]**

10. (a) por tratar de utilizar $V = \pi \int_a^b x^2 dy$ (M1)

por tratar de expresar x^2 en función de y [es decir, $x^2 = 4(y+16)$] (M1)

para $y = h$, $V = 4\pi \int_0^h y+16 dy$ A1

$$V = 4\pi \left(\frac{h^2}{2} + 16h \right) \quad \text{AG}$$

[3 puntos]

(b) (i) **MÉTODO 1**

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \times \frac{dV}{dt} \quad \text{(M1)}$$

$$\frac{dV}{dh} = 4\pi(h+16) \quad \text{(A1)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi(h+16)} \times \frac{-250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} \quad \text{M1A1}$$

Nota: Conceda **M1** por la sustitución en $\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \times \frac{dV}{dt}$.

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2} \quad \text{AG}$$

MÉTODO 2

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(h+16) \frac{dh}{dt} \quad \text{(derivación implícita)} \quad \text{(M1)}$$

$$\frac{-250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} = 4\pi(h+16) \frac{dh}{dt} \quad \text{(o equivalente)} \quad \text{A1}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi(h+16)} \times \frac{-250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} \quad \text{M1A1}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2} \quad \text{AG}$$

(ii) $\frac{dt}{dh} = -\frac{4\pi^2(h+16)^2}{250\sqrt{h}} \quad \text{A1}$

$$t = \int -\frac{4\pi^2(h+16)^2}{250\sqrt{h}} dh \quad \text{(M1)}$$

$$t = \int -\frac{4\pi^2(h^2 + 32h + 256)}{250\sqrt{h}} dh \quad \text{A1}$$

$$t = \frac{-4\pi^2}{250} \int \left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}} \right) dh \quad \text{AG}$$

Continuación de la Pregunta 10

(iii) **MÉTODO 1**

$$t = \int_{48}^0 \left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}} \right) dh \quad (M1)(A1)$$

$$t = 2688,756... \text{ (s)} \quad (A1)$$

45 minutos (aproximando al número de minutos más próximo) **A1**

MÉTODO 2

$$t = \frac{-4\pi^2}{250} \left(\frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{3} h^{\frac{3}{2}} + 512h^{\frac{1}{2}} \right) + c \quad A1$$

$$t = 0; h = 48 \Rightarrow c = 2688,756... \left(c = \frac{4\pi^2}{250} \left(\frac{2}{5} \times 48^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{3} \times 48^{\frac{3}{2}} + 512 \times 48^{\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (M1)$$

$$h = 0, t = 2688,756... \left(t = \frac{4\pi^2}{250} \left(\frac{2}{5} \times 48^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{3} \times 48^{\frac{3}{2}} + 512 \times 48^{\frac{1}{2}} \right) \right) \text{ (s)} \quad (A1)$$

45 minutos (aproximando al número de minutos más próximo) **A1**

[11 puntos]

(c) **O BIEN**

el nivel del agua se estabiliza cuando $\frac{dV}{dt} = 0$; es decir, $8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} = 0$ **R1**

por tratar de resolver $8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} = 0$ en h **(M1)**

O BIEN

el nivel del agua se estabiliza cuando $\frac{dh}{dt} = 0$;

es decir, $\frac{1}{4\pi(h+16)} \left(8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} \right) = 0$ **R1**

por tratar de resolver $\frac{1}{4\pi(h+16)} \left(8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} \right) = 0$ en h **(M1)**

LUEGO

$h = 5,06$ (cm) **A1**

[3 puntos]

Total [17 puntos]

11. (a) por elevar al cuadrado ambas ecuaciones **M1**
 $9\text{sen}^2 B + 24\text{sen } B \cos C + 16\text{cos}^2 C = 36$ **(A1)**
 $9\text{cos}^2 B + 24\text{cos } B \text{sen } C + 16\text{sen}^2 C = 1$ **(A1)**
 por sumar las ecuaciones y por utilizar $\text{cos}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$ para
 obtener $9 + 24(\text{sen } B \cos C + \text{cos } B \text{sen } C) + 16 = 37$ **M1**
 $24(\text{sen } B \cos C + \text{cos } B \text{sen } C) = 12$ **A1**
 $24\text{sen}(B + C) = 12$ **(A1)**
 $\text{sen}(B + C) = \frac{1}{2}$ **AG**

[6 puntos]

- (b) $\text{sen } A = \text{sen}(180^\circ - (B + C))$ con lo que $\text{sen } A = \text{sen}(B + C)$ **R1**
 $\text{sen}(B + C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{1}{2}$ **A1**
 $\Rightarrow A = 30^\circ$ o $A = 150^\circ$ **A1**

Nota: Conceda **R1A1A1** por obtener $B + C = 30^\circ$ o $B + C = 150^\circ$.

- si $A = 150^\circ$, entonces $B < 30^\circ$ **R1**
 por ejemplo, $3\text{sen } B + 4\text{cos } C < \left(\frac{3}{2} + 4\right) < 6$; es decir, una contradicción **R1**
 solo hay un valor posible ($A = 30^\circ$) **AG**

[5 puntos]

Total [11 puntos]

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Matemáticas discretas

EXAMEN DE MUESTRA (adaptación del examen de noviembre de 2014)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 8]

Sea $f(n) = n^5 - n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

- (a) Halle el valor de $f(3)$ y $f(4)$. [1]
- (b) Utilice el algoritmo de Euclides para hallar $\text{mcd}(f(3), f(4))$. [2]
- (c) Utilice el pequeño teorema de Fermat para explicar por qué $f(n)$ siempre es divisible exactamente por 5. [1]
- (d) Descomponga en factores $f(n)$ para luego explicar por qué siempre es divisible exactamente por 6. [4]

2. [Puntuación máxima: 8]

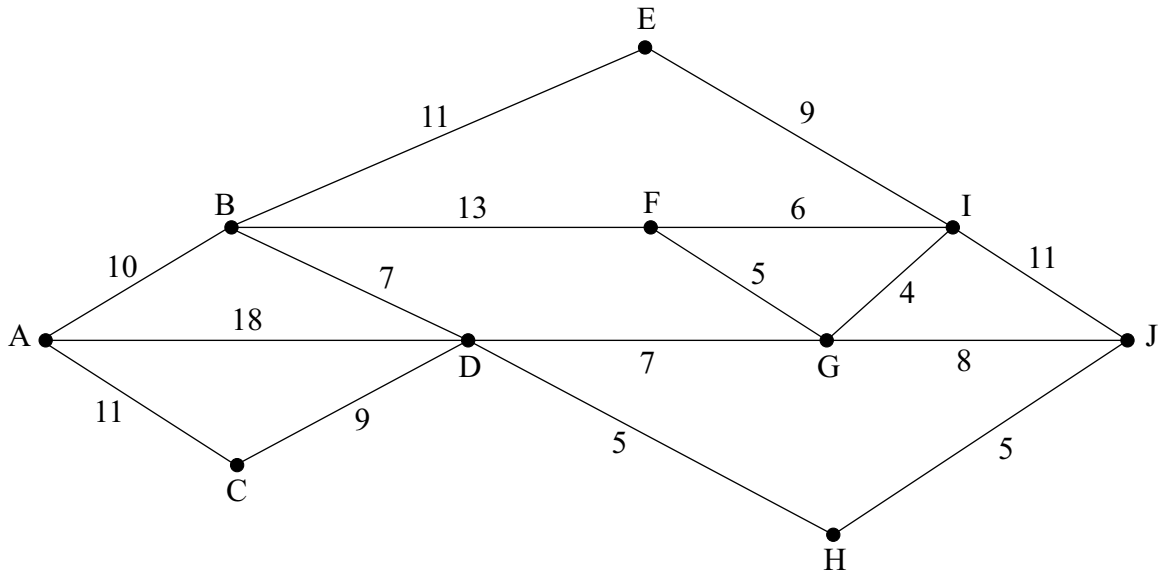
- (a) Utilice el principio del palomar para demostrar que en todo grafo simple que tenga dos o más vértices y en el que cada vértice esté conectado con al menos otro vértice, tiene que haber al menos dos vértices que tengan el mismo grado. [4]

Diecisiete personas asisten a una reunión.

- (b) Cada persona le da la mano al menos a otra persona, y no hay nadie que le dé la mano más de una vez a la misma persona. Utilice el resultado del apartado (a) para mostrar que tiene que haber al menos dos personas que le den la mano al mismo número de personas. [4]

3. [Puntuación máxima: 13]

El siguiente grafo representa el costo en dólares del viaje en autobús entre 10 ciudades de una provincia dada.



- (a) Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar la ruta más barata entre A y J, e indique cuánto cuesta el viaje.

[7]

En lo que queda de pregunta puede hallar la ruta más barata entre dos ciudades dadas mediante inspección.

Se sabe que el viaje en el que se recorren todas las carreteras, sin repetir ninguna, cuesta en total \$139. Un turista decide recorrer todas las carreteras al menos una vez, empezando y terminando en la ciudad A.

- (b) Halle el menor costo posible de este viaje, indicando claramente qué carreteras habrá que recorrer más de una vez. Debe justificar completamente su respuesta.

[6]

4. [Puntuación máxima: 10]

- (a) Resuelva, mediante cualquier método, el siguiente sistema de congruencias lineales

$$x \equiv 9 \pmod{11}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5}.$$

[3]

- (b) Halle el resto que se obtiene cuando se divide 41^{82} entre 11.

[4]

- (c) Utilizando las respuestas de los apartados (a) y (b), halle el resto que se obtiene cuando se divide 41^{82} entre 55.

[3]

5. [Puntuación máxima: 11]

Andy y Roger están jugando al tenis con la siguiente regla: si uno de ellos gana un juego cuando tiene el saque, vuelve a sacar en el siguiente juego, y si lo pierde, es el otro jugador el que saca en el siguiente juego.

La probabilidad de que Andy gane un juego cuando tiene el saque es igual a $\frac{1}{2}$, y la probabilidad de que gane un juego cuando no tiene el saque es igual a $\frac{1}{4}$. Andy tiene el saque en el primer juego. Sea u_n la función que representa la probabilidad de que Andy gane el n -ésimo juego.

(a) Indique el valor de u_1 . [1]

(b) Muestre que u_n satisface la relación de recurrencia

$$u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}. \quad [4]$$

(c) Resuelva esta relación de recurrencia para hallar la probabilidad de que Andy gane el n -ésimo juego. [6]

Esquema de calificación

Examen de muestra
(adaptación del examen de noviembre de 2014)

Matemática discreta

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento (es decir, el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de los puntos **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando no se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Se deberá calificar siguiendo las instrucciones que aparecen en RM™ Assessor y conforme al documento “**Matemáticas NS: Orientación para la calificación electrónica (e-marking) de mayo de 2016**”. Es vital que lea este documento antes de empezar a corregir y a calificar. En particular, tenga presente lo siguiente:

- Las puntuaciones deben quedar registradas utilizando los sellos de anotación. Por favor, compruebe que está dejando registrados los puntos para la pregunta que efectivamente está corrigiendo.
- Si hay un apartado que sea **totalmente correcto** (y que haya obtenido todos los puntos que requieren la evidencia de un procedimiento explícito), utilice los tics con números para poner el sello correspondiente a la puntuación máxima.
- Si hay un apartado que esté todo mal, ponga el sello **A0** junto a la respuesta final.
- Si un apartado obtiene una puntuación intermedia, esta **debe** quedar registrada utilizando **todas** las anotaciones.
- RM™ Assessor sumará los puntos obtenidos y los registrará.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes, de haber alguno.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida los puntos.

- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional correcto. Sin embargo, si el desarrollo adicional revela falta de comprensión matemática, no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla puede presentarse en las respuestas numéricas, donde un valor exacto correcto viene seguido de un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se utiliza luego en un apartado posterior y se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error, conceda los puntos **FT** (del inglés *follow through*) que corresponda pero no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional)
2.	$\frac{1}{4} \sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones **N**

Conceda puntos **N** por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos **N** y de otro tipo de puntuación.
- Puede ocurrir que haya menos puntos **N** que el total de puntos **M**, **A** y **R**; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando haya **evidencia explícita** del procedimiento seguido.

5 Puntuación de arrastre de error (FT)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), debe haber **evidencia explícita del procedimiento empleado** para obtener la respuesta (no tan solo una respuesta final basada en la respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido en el apartado anterior, la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos **FT**.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin \theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

- Dentro de un apartado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo **A que dependa del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos **M** si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (**MR**, del inglés misread). A un alumno solo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello **MR** para indicar que se ha producido un error de lectura. A continuación, no conceda el primero de los puntos que corresponda conceder —aunque se trate de puntos **M**— pero conceda todas los puntos restantes, de modo que el alumno solo pierda un punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos.
- Si este error de lectura (**MR**) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

7 Puntuación discrecional (**d**)

*En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación apropiada. En esos casos se ha de utilizar la anotación **DM** y, al lado de la puntuación, se ha de escribir una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.*

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se han de puntuar en sintonía con lo que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con el jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados mediante los encabezamientos **METHOD 1**, **METHOD 2 (MÉTODO 1, MÉTODO 2)**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **EITHER... OR (O BIEN... O BIEN)**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas alternativas.

9 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.

- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos suelen no incluir en los exámenes) normalmente aparecen escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (de habérsela incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\text{sen}(5x-3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x-3))5 \quad (=10\cos(5x-3)) \quad \mathbf{A1}$$

Se ha de conceder **A1** por $(2\cos(5x-3))5$, aun cuando el alumno no lo haya simplificado luego a $10\cos(5x-3)$.

10 Precisión de las respuestas

A los alumnos **YA NO** se les va a penalizar por los errores de precisión (**AP**, del inglés Accuracy Penalty) cometidos.

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, el esquema asignará un punto a la respuesta dada con la precisión requerida. Cuando esto no se especifique en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas se tendrán que dar exactas o con una aproximación de tres cifras significativas. Por favor, revise cuidadosamente el procedimiento del alumno por si hubiera arrastre de error.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la notación de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas con notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador solamente ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a) 240, 1020 A1

Nota: Conceda **A2** por tres respuestas correctas, **A1** por dos respuestas correctas.

[1 punto]

- (b) $1020 = 240 \times 4 + 60$ (M1)
 $240 = 60 \times 4$
 $\text{mcd}(1020, 240) = 60$ A1

[2 puntos]

Nota: Debe haber llegado al resultado utilizando el algoritmo de Euclides.

- (c) según el pequeño teorema de Fermat, con $p = 5$
 $n^5 \equiv n \pmod{5}$ A1
 así pues, $f(n)$ es divisible entre 5

[1 punto]

- (d) $f(n) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ (A1)A1
 $n - 1, n, n + 1$ son números enteros consecutivos y, por lo tanto,
 debe haber entre ellos un múltiplo de 2 y uno de 3 R1R1

Nota: Conceda **R1** por la justificación del 2 y **R1** por la justificación del 3.

y, por consiguiente, $f(n)$ es múltiplo de 6 AG

[4 puntos]

Total [8 puntos]

2. (a) sea v el n.º de vértices del grafo; dado que el grafo es simple,
 el grado de cada vértice es $\leq v - 1$ A1
 el grado de cada vértice es ≥ 1 A1
 por lo tanto, para el grado de cada vértice hay $v - 1$ valores posibles A1
 sabiendo que hay v vértices, por el principio del palomar tiene
 que haber al menos dos que tengan el mismo grado R1

[4 puntos]

- (b) por considerar un grafo en el que los vértices representen
 a las personas que asisten a la reunión y donde dos vértices dados
 estén conectados si las dos personas que representan se han dado la mano M1
 el grafo es simple, puesto que no hay nadie que le dé la mano
 más de una vez a la misma persona (ni tampoco puede uno darse
 la mano a sí mismo) A1
 cada vértice está conectado con, al menos, otro vértice,
 puesto que todo el mundo le da la mano al menos a otra persona A1
 el grado de cada vértice es igual al número de apretones de manos
 que ha dado esa persona, con lo que, por la demostración anterior,
 tiene que haber al menos dos personas que hayan apretado
 el mismo número de manos R1

[4 puntos]

Total [8 puntos]

3. (a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	←10	11	18						
B		10	←	17	21	23				
C			11	↑						
D				17	←	24		22		
E					21			↑	30	
H								22	←	27
F						23				29
G							24			28
J										27

M1A1A1A1

(M1 por intentar aplicar el algoritmo de Dijkstra)

(A1 por el valor de D = 17)

(A1 por el valor de H = 22)

(A1 por el valor de G = 24)

la ruta es ABDHJ

el costo es igual a \$27

(M1)A1
A1

Nota: Acepte otros diseños/diagramas.

[7 puntos]

(b) hay 4 vértices impares: A, D, F y J
 estos vértices se pueden unir de 3 formas distintas,
 con los siguientes costos adicionales

AD y FJ $17 + 13 = 30$

AF y DJ $23 + 10 = 33$

AJ y DF $27 + 12 = 39$

A1

M1A1A1

Notas: Conceda M1 por intentar hallar rutas diferentes.

Conceda A1A1 por dar el valor correcto de los tres costos; A1 por dar uno correcto.

es necesario repetir AB, BD, FG y GJ

costo total es igual a $139 + 30 = \$169$

A1

A1

[6 puntos]

Total [13 puntos]

4. (a) **MÉTODO 1**

por enumerar 9, 20, 31, ... y 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, ...
una solución es 31
utilizando el teorema chino del resto, la solución completa es
 $x \equiv 31 \pmod{55}$

M1
(A1)
A1 N2

MÉTODO 2

$x \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow x = 9 + 11t$
 $\Rightarrow 9 + 11t \equiv 1 \pmod{5}$
 $\Rightarrow t \equiv 2 \pmod{5}$
 $\Rightarrow t = 2 + 5s$
 $\Rightarrow x = 9 + 11(2 + 5s)$
 $\Rightarrow x = 31 + 55s (\Rightarrow x \equiv 31 \pmod{55})$

M1
A1
A1

Nota: Acepte otros métodos; p. ej., fórmula, ecuación diofántica.

Nota: Acepte otras respuestas equivalentes; p. ej., $79 \pmod{55}$.

[3 puntos]

(b) $41^{82} \equiv 8^{82} \pmod{11}$

según el pequeño teorema de Fermat $8^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ (o $41^{10} \equiv 1 \pmod{11}$)

$8^{82} \equiv 8^2 \pmod{11}$
 $\equiv 9 \pmod{11}$

el resto es igual a 9

M1
M1
(A1)
A1

[4 puntos]

Nota: Acepte simplificaciones hechas sin recurrir a Fermat.

(c) $41^{82} \equiv 1^{82} \equiv 1 \pmod{5}$

así pues, cuando 41^{82} se divide entre 5 el resto es igual a 1,
y cuando se divide entre 11 el resto es 9.

por tanto, conforme al apartado (a), el resto es igual a 31

A1
R1
A1

[3 puntos]

Total [10 puntos]

5. (a) $\frac{1}{2}$

A1

[1 punto]

(b) Andy podría ganar el n -ésimo juego ganando el anterior (el $n-1$) y, a continuación, ganando el n -ésimo juego, o perdiendo el anterior (el $n-1$) y ganando luego el n -ésimo.

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}(1 - u_{n-1})$$

(M1)
A1A1M1

Nota: Conceda A1 por cada término y M1 por la suma de las dos probabilidades.
--

$$u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}$$

AG

[4 puntos]

(c) la solución general es $u_n = A\left(\frac{1}{4}\right)^n + p(n)$

(M1)

por probar $p(n) = b$, para obtener una solución particular

(M1)

$$b = \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}$$

(A1)

$$b = \frac{1}{3}$$

a partir de lo anterior, $u_n = A\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3}$

(A1)

por utilizar $u_1 = \frac{1}{2}$

M1

$$\frac{1}{2} = A\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

a partir de lo anterior, $u_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3}$

A1

Nota: Acepte otros métodos válidos.
--

[6 puntos]

Total [11 puntos]

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Análisis

EXAMEN DE MUESTRA (adaptación del examen de noviembre de 2014)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 14]

- (a) Utilice el criterio de la integral de Cauchy para determinar la convergencia o la divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,5}}. \quad [3]$$

(b) Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \times n^{0,5}}$.

- (i) Utilice el criterio de D'Alembert para mostrar que S es convergente para $-3 < x < 1$.

- (ii) A partir de lo anterior, halle el intervalo de convergencia de S . [11]

2. [Puntuación máxima: 13]

- (a) Utilice un factor integrante para mostrar que la solución general de $\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = -\frac{2}{t}$, $t > 0$ es $x = 2 + ct$, donde c una constante. [4]

El peso en kilogramos de un perro, t semanas después de haberlo comprado en una tienda de mascotas, se puede modelizar por la siguiente función

$$w(t) = \begin{cases} 2 + ct & 0 \leq t \leq 5 \\ 16 - \frac{35}{t} & t > 5 \end{cases}.$$

- (b) Sabiendo que $w(t)$ es continua, halle el valor de c . [2]

- (c) Escriba un límite superior para el peso del perro. [1]

- (d) Demuestre, a partir de la definición de derivada, que $w(t)$ es derivable en $t = 5$. [6]

3. [Puntuación máxima: 10]

Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ donde $f(x, y) = y - 2x$.

- (a) Dibuje aproximadamente, en un único diagrama, las cuatro isoclinas correspondientes a $f(x, y) = k$ donde k toma los valores -1 ; $-0,5$; 0 y 1 . Indique claramente dónde corta cada isoclina al eje y . [2]

Una curva C pasa por el punto $(0, 1)$ y satisface la anterior ecuación diferencial.

- (b) Dibuje aproximadamente la curva C en su diagrama. [3]
- (c) Indique una relación particular entre la isoclina $f(x, y) = -0,5$ y la curva C en el punto en el que se cortan. [1]
- (d) Utilice el método de Euler con un paso de $0,1$ para hallar un valor aproximado de y en C , cuando $x = 0,5$. [4]

4. [Puntuación máxima: 13]

En esta pregunta puede suponer que $\arctan x$ es continua y derivable para todo $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Considere la serie geométrica infinita

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad |x| < 1.$$

Muestre que la suma de la serie es igual a $\frac{1}{1+x^2}$. [1]

- (b) A partir de lo anterior, muestre que un desarrollo de $\arctan x$ es $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ [4]

- (c) f es una función continua definida en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, siendo $f'(x) > 0$ en $]a, b[$.

Utilice el teorema del valor medio para demostrar que para todo $x, y \in [a, b]$, si $y > x$ entonces $f(y) > f(x)$. [4]

- (d) (i) Sabiendo que $g(x) = x - \arctan x$, demuestre que $g'(x) > 0$, para $x > 0$.
- (ii) Utilice el resultado del apartado (c) para demostrar que $\arctan x < x$, para $x > 0$. [4]

Esquema de calificación

Examen de muestra
(adaptación del examen de noviembre de 2014)

Análisis

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento (es decir, el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de los puntos **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando no se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Se deberá calificar siguiendo las instrucciones que aparecen en RM™ Assessor y conforme al documento “**Matemáticas NS: Orientación para la calificación electrónica (e-marking) de mayo de 2016**”. Es vital que lea este documento antes de empezar a corregir y a calificar. En particular, tenga presente lo siguiente:

- Las puntuaciones deben quedar registradas utilizando los sellos de anotación. Por favor, compruebe que está dejando registrados los puntos para la pregunta que efectivamente está corrigiendo.
- Si hay un apartado que sea **totalmente correcto** (y que haya obtenido todos los puntos que requieren la evidencia de un procedimiento explícito), utilice los tics con números para poner el sello correspondiente a la puntuación máxima.
- Si hay un apartado que esté todo mal, ponga el sello **A0** junto a la respuesta final.
- Si un apartado obtiene una puntuación intermedia, esta **debe** quedar registrada utilizando **todas** las anotaciones.
- RM™ Assessor sumará los puntos obtenidos y los registrará.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes, de haber alguno.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida los puntos.

- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional correcto. Sin embargo, si el desarrollo adicional revela falta de comprensión matemática, no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla puede presentarse en las respuestas numéricas, donde un valor exacto correcto viene seguido de un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se utiliza luego en un apartado posterior y se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error, conceda los puntos **FT** (del inglés *follow through*) que corresponda pero no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones **N**

Conceda puntos **N** por respuestas **correctas** que **no** vengán acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos **N** y de otro tipo de puntuación.
- Puede ocurrir que haya menos puntos **N** que el total de puntos **M**, **A** y **R**; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando haya **evidencia explícita** del procedimiento seguido.

5 Puntuación de arrastre de error (FT)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), debe haber **evidencia explícita del procedimiento empleado** para obtener la respuesta (no tan solo una respuesta final basada en la respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido en el apartado anterior, la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos **FT**.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

- Dentro de un apartado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo **A que dependa del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos **M** si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (**MR**, del inglés misread). A un alumno solo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello **MR** para indicar que se ha producido un error de lectura. A continuación, no conceda el primero de los puntos que corresponda conceder —aunque se trate de puntos **M**— pero conceda todas los puntos restantes, de modo que el alumno solo pierda un punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos.
- Si este error de lectura (**MR**) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

7 Puntuación discrecional (**d**)

*En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación apropiada. En esos casos se ha de utilizar la anotación **DM** y, al lado de la puntuación, se ha de escribir una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.*

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se han de puntuar en sintonía con lo que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con el jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados mediante los encabezamientos **METHOD 1**, **METHOD 2 (MÉTODO 1, MÉTODO 2)**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **EITHER... OR (O BIEN... O BIEN)**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas alternativas.

9 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.

- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos suelen no incluir en los exámenes) normalmente aparecen escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (de habérsela incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x-3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x-3))5 \quad (=10\cos(5x-3)) \quad \mathbf{A1}$$

Se ha de conceder **A1** por $(2\cos(5x-3))5$, aun cuando el alumno no lo haya simplificado luego a $10\cos(5x-3)$.

10 Precisión de las respuestas

A los alumnos **YA NO** se les va a penalizar por los errores de precisión (**AP**, del inglés Accuracy Penalty) cometidos.

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, el esquema asignará un punto a la respuesta dada con la precisión requerida. Cuando esto no se especifique en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas se tendrán que dar exactas o con una aproximación de tres cifras significativas. Por favor, revise cuidadosamente el procedimiento del alumno por si hubiera arrastre de error.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la notación de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas con notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador solamente ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a) $\int_1^\infty x^{-0,5} dx$ **M1**
 $= \lim_{H \rightarrow \infty} \left[2x^{0,5} \right]_1^H$ **A1**

Nota: Acepte $\left[2x^{0,5} \right]_1^\infty$.

este valor no es finito, por lo que la serie es divergente **R1**

Notas: Acepte razonamientos equivalentes; p. ej., $\rightarrow \infty$, o "el límite no existe".
 Si el límite inferior no es igual a 1 conceda **MOA0** pero, aun así, el **R1** se puede conceder si el razonamiento final es correcto.

[3 puntos]

(b) (i) por aplicar el criterio de D'Alembert **M1**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^{0,5}} \times \frac{2^n n^{0,5}}{(x+1)^n} \right|$$
 A1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)n^{0,5}}{2(n+1)^{0,5}} \right| = \left| \frac{(x+1)}{2} \right|$$
 A1

Nota: No penalice la ausencia de límites y de signos de módulo.

converge si $\left| \frac{x+1}{2} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{(x+1)}{2} < 1$ **M1**

$\Rightarrow -3 < x < 1$ **A1**

Nota: Acepte $-2 < x + 1 < 2$.

(ii) por considerar los extremos **M1**

para $x = -3$, la serie es $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^{0,5}}$ **A1**

$\frac{1}{n^{0,5}}$ es una progresión decreciente cuyo límite es cero, **R1**

así pues, por el criterio de las series alternadas, la serie es convergente **R1**

para $x = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{0,5}}$, que es divergente

utilizando el apartado (a) o las series-p **A1**

Nota: Este **A1** se concede por el razonamiento y la afirmación de que es divergente.

el intervalo de convergencia es $-3 \leq x < 1$ **A1**

[11 puntos]

Total [14 puntos]

2. (a) el factor integrante es $e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{-\ln t} \left(= \frac{1}{t} \right)$ **M1A1**

$$\frac{x}{t} = \int -\frac{2}{t^2} dt = \frac{2}{t} + c$$
A1A1

Nota: Conceda **A1** por $\frac{x}{t}$ y **A1** por $\frac{2}{t} + c$.

$$x = 2 + ct$$

AG
[4 puntos]

(b) dado que es continua en $x = 5$

$$5c + 2 = 16 - \frac{35}{5} \Rightarrow c = \frac{7}{5}$$
M1A1

[2 puntos]

(c) por cualquier valor ≥ 16 **A1**

Nota: Acepte valores inferiores a 16 si se los justifica plenamente haciendo referencia a la máxima edad que alcanza un perro.

[1 punto]

(d) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{7}{5}(5+h) + 2 - \frac{7}{5}(5) - 2}{h} \right) = \frac{7}{5}$ **M1A1**

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{16 - \frac{35}{5+h} - 16 + \frac{35}{5}}{h} \right) \left(= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{-35}{5+h} + 7 \right) \right)$$
M1

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{-35 + 35 + 7h}{(5+h)h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{7}{5+h} \right) = \frac{7}{5}$$
M1A1

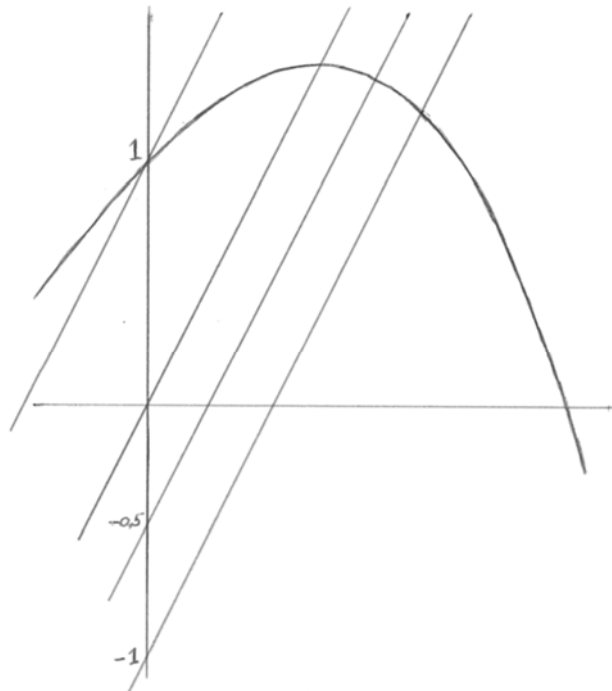
ambos límites son iguales, por los que es derivable en $t = 5$ **R1AG**

Notas: También se pueden utilizar los límites cuando $t \rightarrow 5$.
 Por cada valor $\frac{7}{5}$ obtenido mediante derivación estándar conceda **A1**.
 Para conseguir los otros 4 puntos el alumno ha de dar una explicación rigurosa sobre cómo se pasa de las derivadas por la derecha y por la izquierda a la derivada.

Notas: Si el alumno opera con t y, a continuación, sustituye $t = 5$ al final, conceda la siguiente puntuación:
 El primer **M1** por utilizar en el tramo de la recta la fórmula en t , y **A1** por obtener $\frac{7}{5}$.
 Conceda los siguientes 2 puntos de método incluso aunque no haya sustituido $t = 5$, y **A1** por obtener $\frac{7}{5}$.

[6 puntos]
Total [13 puntos]

3. (a) y (b)



- (a) **A1** por 4 rectas paralelas con pendiente positiva **A1**
A1 por indicar correctamente los puntos de corte con el eje y **A1**
[2 puntos]

- (b) **A1** si la curva pasa por el punto (0, 1) con una pendiente positiva inferior a 2
A1 por el punto estacionario sobre $y = 2x$
A1 por una pendiente negativa en las otras 2 isoclinas **A1A1A1**
[3 puntos]

- (c) la isoclina es perpendicular a C **R1**
[1 punto]

- (d) $y_{n+1} = y_n + 0,1(y_n - 2x_n) (= 1,1y_n - 0,2x_n)$ **(M1)(A1)**

Nota: Conceda también **M1A1** cuando no haya incluido ninguna fórmula pero y_2 sea correcto.

$y_0 = 1 \quad y_1 = 1,1 \quad y_2 = 1,19 \quad y_3 = 1,269 \quad y_4 = 1,3359$ **(M1)**
 $y_5 = 1,39$ (aproximando a 3 cifras significativas) **A1**

Nota: **M1** es por el uso repetido de la fórmula, con pasos de 0,1.

Nota: Acepte únicamente 1,39 o 1,4.

[4 puntos]
Total [10 puntos]

4. (a) $r = -x^2, S = \frac{1}{1+x^2}$

A1AG

[1 punto]

(b) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

O BIEN

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots dx$$

M1

$$\arctan x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

A1

Nota: No penalice en este punto del desarrollo la ausencia de c .

para $x=0$ tenemos que $\arctan 0 = c$ y, por consiguiente, $c=0$

M1A1

O BIEN

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots dt$$

M1A1A1

Notas: Acepte x como la variable y c como el límite.

M1 por saber que hace falta integrar, **A1** por cada uno de los límites.

$$[\arctan t]_0^x = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \right]_0^x$$

A1

a partir de lo anterior, $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

AG

[4 puntos]

(c) por aplicar el TVM a la función f en el intervalo $[x, y]$

M1

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \text{ (para algún } c \in]x, y[\text{)}$$

A1

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0 \text{ (dado que } f'(c) > 0 \text{)}$$

R1

$$f(y) - f(x) > 0 \text{ dado que } y > x$$

R1

$$\Rightarrow f(y) > f(x)$$

AG

[4 puntos]

Nota: Si el alumno utiliza x en lugar de c se concederá **M1A0R0**, pero aun así podría obtener el **R1** siguiente.

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 4

(d) (i) $g(x) = x - \arctan x \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ **A1**

esto es mayor que cero porque $\frac{1}{1+x^2} < 1$ **R1**

así pues, $g'(x) > 0$ **AG**

(ii) (g es una función continua, definida sobre $[0, b]$ y derivable en $]0, b[$, siendo $g'(x) > 0$ en $]0, b[$ para todo $b \in \mathbb{R}$)

(si $x \in [0, b]$, entonces) según el resultado

del apartado (c) $g(x) > g(0)$ **M1**

$x - \arctan x > 0 \Rightarrow \arctan x < x$ **M1**

(dado que b puede tomar cualquier valor positivo, esto es cierto para todo $x > 0$)

AG
[4 puntos]

Total [13 puntos]

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos

EXAMEN DE MUESTRA (adaptación del examen de noviembre de 2014)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 12]

En la siguiente tabla de Cayley se muestra un grupo respecto a la operación binaria multiplicación módulo 15.

\times_{15}	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
13	13	11	7	1	14	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
14	14	13	11	8	7	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>

- (a) Halle el valor que representa cada una de las letras que hay en la tabla. [3]
- (b) Halle el orden de cada uno de los elementos del grupo. [3]
- (c) Escriba los tres conjuntos que forman subgrupos de orden 2. [2]
- (d) Halle los tres conjuntos que forman subgrupos de orden 4. [4]

2. [Puntuación máxima: 8]

$f: \mathbb{R} \setminus \{0,5\} \rightarrow \mathbb{R}$ se define mediante $f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$.

- (a) Demuestre que f es una función inyectiva. [4]
- (b) Demuestre que f no es una función sobreyectiva. [4]

3. [Puntuación máxima: 9]

Considere el conjunto A , compuesto por todas las permutaciones de los enteros 1, 2, 3, 4, 5.

- (a) Dos elementos de A son $p = (1\ 2\ 5)$ y $q = (1\ 3)(2\ 5)$.
Halle una única permutación, equivalente a $q \circ p$. [3]
- (b) Indique una permutación que pertenezca a A y que sea de orden 6. [2]
- (c) Sea $P = \{\text{todas las permutaciones en } A \text{ en las que exactamente dos enteros cambian de posición}\}$, y $Q = \{\text{todas las permutaciones en } A \text{ en las que el entero 1 cambia de posición}\}$.
 - (i) Enumere todos los elementos pertenecientes a $P \cap Q$.
 - (ii) Halle $n(P \cap Q')$. [4]

4. [Puntuación máxima: 10]

En el grupo $\{G, *\}$ el elemento neutro es e_G y en el grupo $\{H, \circ\}$ el elemento neutro es e_H . Un homomorfismo f es tal que $f: G \rightarrow H$. Se sabe que $f(e_G) = e_H$.

(a) Demuestre que para todo $a \in G$, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. [4]

Sea $\{H, \circ\}$ el grupo cíclico de orden siete, y sea p un generador. Sea $x \in G$ tal que $f(x) = p^2$.

(b) Halle $f(x^{-1})$. [2]

(c) Sabiendo que $f(x * y) = p$, halle $f(y)$. [4]

5. [Puntuación máxima: 11]

$\{G, *\}$ es un grupo cuyo elemento neutro es e . Sea $a, b \in G$.

(a) Verifique que el simétrico de $a * b^{-1}$ es igual a $b * a^{-1}$. [3]

Sea $\{H, *\}$ un subgrupo de $\{G, *\}$. Sea R una relación definida sobre G mediante

$$aRb \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H.$$

(b) Demuestre que R es una relación de equivalencia, indicando claramente cada vez que utilice alguna de las cuatro propiedades que se requieren de un grupo. [8]

Esquema de calificación

Examen de muestra
(adaptación del examen de noviembre de 2014)

Conjuntos, relaciones y grupos

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento (es decir, el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de los puntos **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando no se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Se deberá calificar siguiendo las instrucciones que aparecen en RM™ Assessor y conforme al documento “**Matemáticas NS: Orientación para la calificación electrónica (e-marking) de mayo de 2016**”. Es vital que lea este documento antes de empezar a corregir y a calificar. En particular, tenga presente lo siguiente:

- Las puntuaciones deben quedar registradas utilizando los sellos de anotación. Por favor, compruebe que está dejando registrados los puntos para la pregunta que efectivamente está corrigiendo.
- Si hay un apartado que sea **totalmente correcto** (y que haya obtenido todos los puntos que requieren la evidencia de un procedimiento explícito), utilice los tics con números para poner el sello correspondiente a la puntuación máxima.
- Si hay un apartado que esté todo mal, ponga el sello **A0** junto a la respuesta final.
- Si un apartado obtiene una puntuación intermedia, esta **debe** quedar registrada utilizando **todas** las anotaciones.
- RM™ Assessor sumará los puntos obtenidos y los registrará.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes, de haber alguno.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida los puntos.

- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional correcto. Sin embargo, si el desarrollo adicional revela falta de comprensión matemática, no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla puede presentarse en las respuestas numéricas, donde un valor exacto correcto viene seguido de un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se utiliza luego en un apartado posterior y se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error, conceda los puntos **FT** (del inglés *follow through*) que corresponda pero no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional)
2.	$\frac{1}{4} \sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones **N**

Conceda puntos **N** por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos **N** y de otro tipo de puntuación.
- Puede ocurrir que haya menos puntos **N** que el total de puntos **M**, **A** y **R**; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando haya **evidencia explícita** del procedimiento seguido.

5 Puntuación de arrastre de error (FT)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), debe haber **evidencia explícita del procedimiento empleado** para obtener la respuesta (no tan solo una respuesta final basada en la respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido en el apartado anterior, la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos **FT**.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin \theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

- Dentro de un apartado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo **A que dependa del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos **M** si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (**MR**, del inglés misread). A un alumno solo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello **MR** para indicar que se ha producido un error de lectura. A continuación, no conceda el primero de los puntos que corresponda conceder —aunque se trate de puntos **M**— pero conceda todas los puntos restantes, de modo que el alumno solo pierda un punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos.
- Si este error de lectura (**MR**) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

7 Puntuación discrecional (**d**)

*En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación apropiada. En esos casos se ha de utilizar la anotación **DM** y, al lado de la puntuación, se ha de escribir una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.*

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se han de puntuar en sintonía con lo que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con el jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados mediante los encabezamientos **METHOD 1**, **METHOD 2 (MÉTODO 1, MÉTODO 2)**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **EITHER... OR (O BIEN... O BIEN)**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas alternativas.

9 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.

- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos suelen no incluir en los exámenes) normalmente aparecen escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (de habérsela incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\text{sen}(5x-3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x-3))5 \quad (=10\cos(5x-3)) \quad \mathbf{A1}$$

Se ha de conceder **A1** por $(2\cos(5x-3))5$, aun cuando el alumno no lo haya simplificado luego a $10\cos(5x-3)$.

10 Precisión de las respuestas

A los alumnos **YA NO** se les va a penalizar por los errores de precisión (**AP**, del inglés Accuracy Penalty) cometidos.

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, el esquema asignará un punto a la respuesta dada con la precisión requerida. Cuando esto no se especifique en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas se tendrán que dar exactas o con una aproximación de tres cifras significativas. Por favor, revise cuidadosamente el procedimiento del alumno por si hubiera arrastre de error.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la notación de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas con notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador solamente ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a) $a = 1, b = 8, c = 4,$
 $d = 8, e = 4, f = 2,$
 $g = 4, h = 2, i = 1$

A3

Nota: Conceda **A3** por 9 respuestas correctas, **A2** por 6 o más, y **A1** por 3 o más.

[3 puntos]

(b)

Elementos	Orden
1	1
4, 11, 14	2
2, 7, 8, 13	4

A3

Nota: Conceda **A3** por 8 respuestas correctas, **A2** por 6 o más, y **A1** por 4 o más.

[3 puntos]

- (c) $\{1, 4\}, \{1, 11\}, \{1, 14\}$

A1A1

Nota: Conceda **A1** por 1 respuesta correcta y **A2** si las 3 son correctas (y no hay más de 3).

[2 puntos]

- (d) $\{1, 2, 4, 8\}, \{1, 4, 7, 13\},$
 $\{1, 4, 11, 14\}$

A1A1

A2

[4 puntos]

Total [12 puntos]

2. (a) **MÉTODO 1**

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{4x + 1}{2x - 1} = \frac{4y + 1}{2y - 1} \quad \text{M1A1}$$

por tratar de aplicar productos cruzados y simplificar M1

$$(4x + 1)(2y - 1) = (2x - 1)(4y + 1)$$

$$\Rightarrow 8xy + 2y - 4x - 1 = 8xy + 2x - 4y - 1 \Rightarrow 6y = 6x$$

$$\Rightarrow x = y \quad \text{A1}$$

por consiguiente, es una función inyectiva AG

[4 puntos]

MÉTODO 2

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1) - 2(4x + 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{-6}{(2x - 1)^2} \quad \text{M1A1}$$

$$< 0 \text{ (para todo } x \neq 0,5) \quad \text{R1}$$

por consiguiente, la función es decreciente a ambos lados de la discontinuidad y

$$f(x) < 2 \text{ para } x < 0,5 \text{ y } x > 2 \text{ para } f(x) > 0,5 \quad \text{R1}$$

por consiguiente, es una función inyectiva AG

Nota: Si el alumno incluye un gráfico de la función que sea correcto y además indica que dicho gráfico es decreciente en cada tramo (o la prueba de la recta horizontal) y concluye que es una función inyectiva, conceda **M1A1R1**.

[4 puntos]

(b) **MÉTODO 1**

por intentar resolver $y = \frac{4x + 1}{2x - 1}$ M1

$$y(2x - 1) = 4x + 1 \Rightarrow 2xy - y = 4x + 1 \quad \text{A1}$$

$$2xy - 4x = 1 + y \Rightarrow x = \frac{1 + y}{2y - 4} \quad \text{A1}$$

no hay ningún valor para $y = 2$ R1

por consiguiente, no es una función sobreyectiva AG

[4 puntos]

MÉTODO 2

por considerar $y = 2$ A1

por intentar resolver $2 = \frac{4x + 1}{2x - 1}$ M1

$$4x - 2 = 4x + 1 \quad \text{A1}$$

que no tiene solución R1

por consiguiente, no es una función sobreyectiva AG

Nota: Si el alumno incluye un gráfico de la función que sea correcto y además concluye que, puesto que hay una asíntota horizontal en $y = 2$, la función no es sobreyectiva, conceda **M1R1**.

[4 puntos]

Total [8 puntos]

3. (a) $q \circ p = (1\ 3)(2\ 5)(1\ 2\ 5)$ (M1)
 $= (1\ 5\ 3)$ M1A1

Nota: M1 por una respuesta que conste de ciclos disjuntos, A1 por (1 5 3).

Notas: Acepte $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, acepte (1 5 3)(2).

Si el alumno lo hace en el orden incorrecto y obtiene (1 3 2), conceda A2.

[3 puntos]

- (b) por cualquier permutación que conste de 2 ciclos disjuntos, uno de longitud 2 y otro de longitud 3; p. ej., (1 2)(3 4 5) M1A1

Notas: Conceda M1A0 por cualquier permutación que conste de 2 ciclos no disjuntos: uno de longitud 2 y otro de longitud 3. Acepte notaciones que no sean notación de ciclos.

[2 puntos]

- (c) (i) (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) M1A1
 (ii) (2 3), (2 4), (2 5), (3 4), (3 5), (4 5) (M1)
 6 A1

Nota: Conceda M1 por al menos un ciclo correcto.

[4 puntos]

Total [9 puntos]

4. (a) $f(e_G) = e_H \Rightarrow f(a * a^{-1}) = e_H$ M1
 f es un homomorfismo; así pues, $f(a * a^{-1}) = f(a) \circ f(a^{-1}) = e_H$ M1A1
 por definición $f(a) \circ (f(a))^{-1} = e_H$; así pues, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$
 (según la ley de eliminación de términos por la izquierda) R1

[4 puntos]

- (b) a partir de (a), $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$
 por consiguiente, $f(x^{-1}) = (p^2)^{-1} = p^5$ M1A1

[2 puntos]

- (c) $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ (homomorfismo) (M1)
 $p^2 \circ f(y) = p$ A1
 $f(y) = p^5 \circ p$ (M1)
 $= p^6$ A1

[4 puntos]

Total [10 puntos]

5. (a) **MÉTODO 1**

$$(a * b^{-1}) * (b * a^{-1}) = a * b^{-1} * b * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

M1A1A1

Notas: **M1** por multiplicar, **A1** por al menos una de las siguientes 3 expresiones, **A1** por llegar hasta e .

Acepte $(b * a^{-1}) * (a * b^{-1}) = b * a^{-1} * a * b^{-1} = b * e * b^{-1} = b * b^{-1} = e$.

MÉTODO 2

$$(a * b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} * a^{-1} \\ = b * a^{-1}$$

M1A1

A1

[3 puntos]

(b) $a * a^{-1} = e \in H$ (puesto que H es un subgrupo)

M1

así, aRa y, por consiguiente, R es reflexiva

$aRb \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H$. H es un subgrupo, con lo que todo elemento

tiene un simétrico en H ; así pues $(a * b^{-1}) \in H$

R1

$$\Leftrightarrow b * a^{-1} \in H \Leftrightarrow bRa$$

M1

así pues, R es simétrica

$$aRb, bRc \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H, b * c^{-1} \in H$$

M1

dado que H es cerrado $(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) \in H$

R1

y utilizando la asociatividad

R1

$$(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) = a * (b^{-1} * b) * c^{-1} = a * e * c^{-1} = a * c^{-1} \in H \Leftrightarrow aRc$$

A1

por lo tanto, R es transitiva

R es reflexiva, simétrica y transitiva

A1

Nota: También vale si esto se va diciendo por separado al final de cada apartado.

por consiguiente, es una relación de equivalencia

AG

[8 puntos]

Total [11 puntos]

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Estadística y probabilidad

EXAMEN DE MUESTRA (adaptación del examen de noviembre de 2014)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Una variable aleatoria X tiene función densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases} .$$

- (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$. [1]
- (b) Halle la función de distribución acumulada correspondiente a X . [5]
- (c) Halle el cuartil superior de X . [1]

2. [Puntuación máxima: 9]

Eric juega en la feria a un juego en el que lanza dardos a una diana. Cada vez que lanza un dardo, la probabilidad de que dé en la diana es igual a 0,2. Puede tirar tantos dardos como quiera, pero cada lanzamiento le cuesta \$1. Si da en la diana tres veces en total, Eric gana \$10.

- (a) Halle la probabilidad de que dé en la diana por tercera vez en el sexto lanzamiento. [3]
- (b) (i) Halle el número esperado de lanzamientos que necesitará Eric para dar en la diana tres veces.
- (ii) Escriba la ganancia o la pérdida esperada si Eric juega hasta ganar los \$10. [3]
- (c) Si Eric tiene solamente \$8, halle la probabilidad de que pierda todo su dinero antes de haber dado en la diana tres veces. [3]

3. [Puntuación máxima: 11]

- (a) Si X e Y son dos variables aleatorias tales que $E(X) = \mu_x$ y $E(Y) = \mu_y$ entonces $\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_x)(Y - \mu_y))$.

Demuestre que si X e Y son independientes, entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$. [3]

- (b) En una empresa dada afirman que la distancia que recorren los empleados para ir al trabajo es independiente del sueldo que ganan. Para comprobarlo, a 20 empleados elegidos al azar se les pregunta qué distancia recorren para ir al trabajo y qué sueldo tienen. Para esta muestra se obtiene un coeficiente de correlación momento-producto, r , igual a $-0,35$.

Puede suponer que tanto los sueldos como las distancias recorridas para ir al trabajo siguen distribuciones normales.

Realice un contraste de una cola a un nivel de significación del 5% para comprobar si la distancia que recorren los empleados para ir al trabajo y los sueldos que ganan son o no independientes. [8]

4. [Puntuación máxima: 13]

Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de media $\lambda > 0$, entonces la función generatriz de probabilidad de X es $G(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

(a) (i) Demuestre que $E(X) = \lambda$.

(ii) Demuestre que $\text{Var}(X) = \lambda$.

[6]

Y es una variable aleatoria, independiente de X , que también sigue una distribución de Poisson de media λ .

(b) Si $S = 2X - Y$, halle

(i) $E(S)$;

(ii) $\text{Var}(S)$.

[3]

Sea $T = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2}$.

(c) (i) Muestre que T es un estimador sin sesgo de λ .

(ii) Muestre que T es un estimador sin sesgo de λ más eficiente que S .

[3]

(d) ¿Podría S o T modelizarse por una distribución de Poisson? Justifique su respuesta.

[1]

5. [Puntuación máxima: 10]

Dos especies de plantas, A y B, tienen idéntico aspecto, pero se sabe que la media de la longitud de las hojas de las plantas de la especie A es igual a 5,2 cm, mientras que la media de la longitud de las hojas de las plantas de la especie B es igual a 4,6 cm. Ambas longitudes pueden modelizarse por distribuciones normales, de desviación típica 1,2 cm.

Con el fin de comprobar si una planta dada pertenece a la especie A o a la especie B, se toman al azar 16 hojas de dicha planta. Se mide la longitud, x , de cada hoja y se calcula la media de las longitudes. Se realiza luego un contraste de una cola de la media muestral, \bar{X} , a un nivel del 5% con las hipótesis $H_0 : \mu = 5,2$ y $H_1 : \mu < 5,2$.

(a) Halle la región crítica para este contraste. [3]

(b) Halle la probabilidad de cometer un error de tipo II si resulta que las hojas pertenecen a una planta de la especie B. [2]

Ahora se sabe que en la zona en la que se recogió esta planta el 90% de las plantas son de la especie A y el 10% son de la especie B.

(c) Halle la probabilidad de que \bar{X} se encuentre dentro de la región crítica del contraste. [2]

(d) Si, tras realizar el contraste, se obtiene que la media muestral está dentro de la región crítica, halle la probabilidad de que las hojas pertenezcan a una planta de la especie A. [3]

Esquema de calificación

Examen de muestra
(adaptación del examen de noviembre de 2014)

Estadística y probabilidad

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento (es decir, el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de los puntos **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando no se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Se deberá calificar siguiendo las instrucciones que aparecen en RM™ Assessor y conforme al documento “**Matemáticas NS: Orientación para la calificación electrónica (e-marking) de mayo de 2016**”. Es vital que lea este documento antes de empezar a corregir y a calificar. En particular, tenga presente lo siguiente:

- Las puntuaciones deben quedar registradas utilizando los sellos de anotación. Por favor, compruebe que está dejando registrados los puntos para la pregunta que efectivamente está corrigiendo.
- Si hay un apartado que sea **totalmente correcto** (y que haya obtenido todos los puntos que requieren la evidencia de un procedimiento explícito), utilice los tics con números para poner el sello correspondiente a la puntuación máxima.
- Si hay un apartado que esté todo mal, ponga el sello **A0** junto a la respuesta final.
- Si un apartado obtiene una puntuación intermedia, esta **debe** quedar registrada utilizando **todas** las anotaciones.
- RM™ Assessor sumará los puntos obtenidos y los registrará.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes, de haber alguno.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida los puntos.

- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional correcto. Sin embargo, si el desarrollo adicional revela falta de comprensión matemática, no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla puede presentarse en las respuestas numéricas, donde un valor exacto correcto viene seguido de un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se utiliza luego en un apartado posterior y se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error, conceda los puntos **FT** (del inglés *follow through*) que corresponda pero no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones **N**

Conceda puntos **N** por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos **N** y de otro tipo de puntuación.
- Puede ocurrir que haya menos puntos **N** que el total de puntos **M**, **A** y **R**; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando haya **evidencia explícita** del procedimiento seguido.

5 Puntuación de arrastre de error (FT)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), debe haber **evidencia explícita del procedimiento empleado** para obtener la respuesta (no tan solo una respuesta final basada en la respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido en el apartado anterior, la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos **FT**.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

- Dentro de un apartado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo **A que dependa del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos **M** si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (**MR**, del inglés misread). A un alumno solo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello **MR** para indicar que se ha producido un error de lectura. A continuación, no conceda el primero de los puntos que corresponda conceder —aunque se trate de puntos **M**— pero conceda todas los puntos restantes, de modo que el alumno solo pierda un punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio para conceder menos puntos.
- Si este error de lectura (**MR**) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin\theta = 1,5$), no conceda el/los puntos correspondientes a las respuestas finales.

7 Puntuación discrecional (**d**)

*En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación apropiada. En esos casos se ha de utilizar la anotación **DM** y, al lado de la puntuación, se ha de escribir una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.*

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se han de puntuar en sintonía con lo que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con el jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados mediante los encabezamientos **METHOD 1**, **METHOD 2 (MÉTODO 1, MÉTODO 2)**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **EITHER... OR (O BIEN... O BIEN)**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas alternativas.

9 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.

- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos suelen no incluir en los exámenes) normalmente aparecen escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (de habérsela incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x-3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x-3))5 \quad (=10\cos(5x-3)) \quad \mathbf{A1}$$

Se ha de conceder **A1** por $(2\cos(5x-3))5$, aun cuando el alumno no lo haya simplificado luego a $10\cos(5x-3)$.

10 Precisión de las respuestas

A los alumnos **YA NO** se les va a penalizar por los errores de precisión (**AP**, del inglés Accuracy Penalty) cometidos.

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, el esquema asignará un punto a la respuesta dada con la precisión requerida. Cuando esto no se especifique en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas se tendrán que dar exactas o con una aproximación de tres cifras significativas. Por favor, revise cuidadosamente el procedimiento del alumno por si hubiera arrastre de error.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

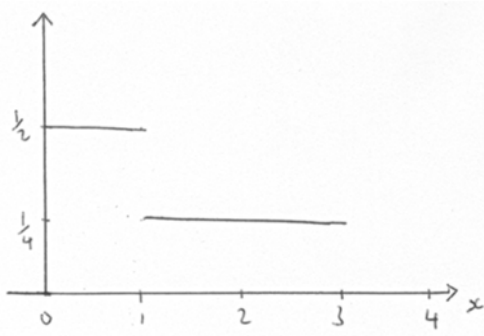
Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la notación de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas con notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador solamente ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a)



A1

Nota: Ignore los extremos abiertos / cerrados y las líneas verticales.

Nota: Conceda **A1** por un gráfico correcto, con escalas en ambos ejes y donde los valores relevantes estén claramente indicados.

[1 punto]

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{4} & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

por considerar las áreas del gráfico aproximado dibujado o por utilizar la integración **(M1)**

$$F(x) = 0, \quad x < 0, \quad F(x) = 1, \quad x \geq 3 \quad \mathbf{A1}$$

$$F(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x < 1 \quad \mathbf{A1}$$

$$F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}, \quad 1 \leq x < 3 \quad \mathbf{A1A1}$$

Nota: Acepte siempre $<$ por \leq y acepte también $>$ por \geq en el primer **A1**.

[5 puntos]

(c) $Q_3 = 2$

A1

[1 punto]

Total [7 puntos]

2. (a) **MÉTODO 1**

sea X el número de dardos que lanza Eric hasta que da en la diana tres veces

$$X \sim \text{NB}(3; 0,2) \quad (M1)$$

$$P(X = 6) = \binom{5}{2} 0,8^3 \times 0,2^3 \quad (A1)$$

$$= 0,04096 \left(= \frac{128}{3125} \right) (\text{exacto}) \quad A1$$

MÉTODO 2

sea X el número de veces que da en la diana en cinco lanzamientos

X es $B(5; 0,2)$ (M1)

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} 0,2^2 \times 0,8^3 \quad (0,2048) \quad (A1)$$

$P(3.^a \text{ diana en el } 6.^o \text{ lanzamiento})$

$$= \binom{5}{2} 0,2^2 \times 0,8^3 \times 0,2 = 0,04096 \left(= \frac{128}{3125} \right) (\text{exacto}) \quad A1$$

[3 puntos]

(b) (i) el número esperado de lanzamientos $= \frac{3}{0,2} = 15$ (M1)A1

(ii) beneficio $= (10 - 15) = -\$5$ o bien pérdida $= \$5$ A1

[3 puntos]

(c) **MÉTODO 1**

sea Y el número de veces que da en la diana en 8 lanzamientos

$$Y \sim B(8; 0,2) \quad (M1)$$

$$P(Y \leq 2) \quad (M1)$$

$$= 0,797 \quad A1$$

MÉTODO 2

supongamos que la 3.^a diana se produce en el $Y.^o$ lanzamiento

$$Y \text{ es NB } (3; 0,2) \quad (M1)$$

$$P(Y > 8) = 1 - P(Y \leq 8) \quad (M1)$$

$$= 0,797 \quad A1$$

[3 puntos]

Total [9 puntos]

3. (a) **MÉTODO 1**

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) \\ &= E(XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y) && \text{(M1)} \\ &= E(XY) - \mu_y E(X) - \mu_x E(Y) + \mu_x\mu_y \\ &= E(XY) - \mu_x\mu_y && \text{A1} \end{aligned}$$

dado que X e Y son independientes, $E(XY) = \mu_x\mu_y$ **R1**

$\text{Cov}(X, Y) = 0$ **AG**

MÉTODO 2

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) \\ &= E(X - \mu_x)E(Y - \mu_y) && \text{(M1)} \end{aligned}$$

dado que X, Y son independientes **R1**

$$= (\mu_x - \mu_x)(\mu_y - \mu_y) \quad \text{A1}$$

$$= 0 \quad \text{AG}$$

[3 puntos]

(b) $H_0 : \rho = 0 \quad H_1 : \rho < 0$ **A1**

Nota: Las hipótesis deben estar expresadas en función de ρ .

estadístico del contraste $t_{contr.} = -0,35 \sqrt{\frac{20-2}{1-(-0,35)^2}}$ **(M1)(A1)**

$= -1,585\dots$ **(A1)**

$n.^{\circ}$ de grados de libertad = 18 **(A1)**

O BIEN

valor del parámetro $p = 0,0652$ **A1**

este valor es mayor que 0,05 **M1**

O BIEN

$t_{5\%}(18) = -1,73$ **A1**

este valor es menor que $-1,59$ **M1**

LUEGO

a partir de lo anterior, se ha de aceptar H_0 o rechazar H_1 (u otra respuesta equivalente u otro equivalente contextual) **R1**

Nota: Aplique arrastre de error para el punto **R1** final.

[8 puntos]
Total [11 puntos]

4. (a) (i) $G'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ **A1**
 $E(X) = G'(1)$ **M1**
 $= \lambda$ **AG**
- (ii) $G''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$ **M1**
 $\Rightarrow G''(1) = \lambda^2$ **(A1)**
 $\text{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$ **(M1)**
 $= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$ **A1**
 $= \lambda$ **AG**
- [6 puntos]**
- (b) (i) $E(S) = 2\lambda - \lambda = \lambda$ **A1**
- (ii) $\text{Var}(S) = 4\lambda + \lambda = 5\lambda$ **(A1)A1**
- Nota:** El primer **A1** se puede conceder bien por 4λ o por $+\lambda$.
- [3 puntos]**
- (c) (i) $E(T) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$ (así pues, T es un estimador sin sesgo) **A1**
- (ii) $\text{Var}(T) = \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{2}\lambda$ **A1**
 este valor es menor que $\text{Var}(S)$ y, por lo tanto, T es el
 estimador más eficiente **R1AG**
- Nota:** Aplique arrastre de error según las varianzas obtenidas
 en (b)(ii) y (c)(ii).
- [3 puntos]**
- (d) no, la media no es igual a la varianza **R1**
[1 punto]
- Total [13 puntos]**

5. (a) $\bar{X} \sim N\left(5, 2; \frac{1,2^2}{16}\right)$ (M1)

el valor crítico es $5,2 - 1,64485 \dots \times \frac{1,2}{4} = 4,70654 \dots$ (A1)

la región crítica es $]-\infty, 4,71]$ A1

Nota: Para el **A1** final, se puede aplicar el arrastre de error según el resultado obtenido para el valor crítico.

[3 puntos]

Nota: Aplique el arrastre de error según los valores obtenidos en (b), (c) y (d).

(b) probabilidad de error de tipo II (M1)
 $= P\left(\bar{X} > 4,70654 \dots \mid \bar{X} \text{ es } N\left(4, 6; \frac{1,2^2}{16}\right)\right)$
 $= 0,361$ A1

[2 puntos]

(c) $0,9 \times 0,05 + 0,1 \times (1 - 0,361 \dots) = 0,108875997 \dots = 0,109$ M1A1

Nota: Conceda **M1** por un promedio ponderado de probabilidades donde los pesos sean 0, 1 y 0, 9.

[2 puntos]

(d) por intentar utilizar la fórmula de la probabilidad condicionada M1

$$\frac{0,9 \times 0,05}{0,108875997 \dots} = 0,41334 \dots = 0,413$$
(A1)
A1

[3 puntos]

Total [10 puntos]
