



International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Mathématiques

Niveau supérieur

Spécimens des épreuves 1, 2 et 3

Pour premiers examens en 2014

TABLE DES MATIÈRES

Spécimens de questions de l'épreuve 1 de mathématiques niveau supérieur

Barème de notation pour les spécimens de questions de l'épreuve 1 de mathématiques niveau supérieur

Spécimens de questions de l'épreuve 2 de mathématiques niveau supérieur

Barème de notation pour les spécimens de questions de l'épreuve 2 de mathématiques niveau supérieur

MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur

Barème de notation pour les spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur

ANALYSE

Spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur

Barème de notation pour les spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur

ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPE

Spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur

Barème de notation pour les spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur

Barème de notation pour les spécimens de questions de l'épreuve 3 de mathématiques niveau supérieur



MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Numéro de session du candidat

0	0								
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

SPÉCIMEN D'ÉPREUVE

Code de l'examen

X	X	X	X	–	X	X	X	X
---	---	---	---	---	---	---	---	---

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice à écran graphique n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toute la section A dans les espaces prévus à cet effet.
- Section B : répondez à toute la section B sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Inscrivez votre numéro de session sur chaque livret de réponse que vous avez utilisé et joignez-les à cette épreuve écrite et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- À la fin de l'examen, indiquez le nombre de feuilles de réponse utilisées dans la case prévue à cet effet sur la couverture du livret.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS* est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est [120 points].

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

SECTION B

Répondez à **toutes** les questions sur les feuilles de réponses fournies. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 12]

Considérez les nombres complexes $z_1 = 2 \operatorname{cis} 150^\circ$ et $z_2 = -1 + i$.

- (a) Calculez $\frac{z_1}{z_2}$ en donnant votre réponse sous la forme module-argument et aussi sous la forme cartésienne. [7 points]
- (b) En utilisant vos résultats, trouvez la valeur exacte de $\tan 75^\circ$, en donnant votre réponse sous la forme $a + \sqrt{b}$, où $a, b \in \mathbb{Z}^+$. [5 points]

11. [Note maximale : 19]

- (a) Trouvez la valeur de l'intégrale $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} \, dx$. [7 points]
- (b) Trouvez la valeur de l'intégrale $\int_0^{0.5} \arcsin x \, dx$. [5 points]
- (c) En utilisant le changement de variables $t = \tan \theta$, trouvez la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}. \quad [7 \text{ points}]$$

12. [Note maximale : 15]

La fonction f est définie par $f(x) = e^x \sin x$.

- (a) Montrez que $f''(x) = 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. [3 points]
- (b) Obtenez une expression similaire pour $f^{(4)}(x)$. [4 points]
- (c) Suggérez une expression pour $f^{(2n)}(x)$, où $n \in \mathbb{Z}^+$, et prouvez votre conjecture par récurrence. [8 points]

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

13. [Note maximale : 14]

La fonction f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ ax^2 + bx - 5, & 2 < x < 3, \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Étant donné que f et sa dérivée, f' , sont continues pour toute valeur dans le domaine de f , trouvez les valeurs de a et b . [6 points]
- (b) Montrez que f est une fonction injective. [3 points]
- (c) Obtenez des expressions pour la fonction réciproque f^{-1} et indiquez leurs domaines. [5 points]
-



BARÈME DE NOTATION

SPÉCIMEN

MATHÉMATIQUES

Niveau supérieur

Épreuve 1

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes doivent être visibles.
- (M)** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- (A)** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- N** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes **ne sont pas** visibles.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

Écrivez les points en rouge sur la copie du candidat, dans la marge de droite.

- Écrivez la **décomposition** détaillée des points attribués en utilisant les abréviations **MI**, **AI**, etc.
- Écrivez le total pour chaque **question** (à la fin de la question) et **l'entourer** d'un cercle.

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **AI**, puisque les points **A** dépendent des points **M** précédent(s), s'il y en a.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, *p.ex.* **MIAI**, cela signifie habituellement **MI** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (*p.ex.* substitution dans une formule) et **AI** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise **(M2)**, **N3**, etc., **ne fractionnez pas** ces points.
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit.

3 Points N

Attribuez des points N pour des réponses correctes si le travail n'est pas visible.

- **N'attribuez pas** un mélange de points **N** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points **N** possibles que le total des points **M**, **A** et **R** ; ce qui est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas l'instruction de montrer les étapes de leur travail.

4 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, *p.ex.* (**MI**), et ils peuvent être attribués seulement s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

5 Points de suivi

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points **A dépendants** ne peut être attribué, mais des points **M** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

6 Erreurs de lecture **MR**

Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquer une pénalité **MR** de 1 point pour cette question. Attribuer les points comme d'habitude et écrire ensuite $-1(\mathbf{MR})$ à côté du total pour cette question. Soustraire 1 point du total de la question. Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), ne pas attribuer le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).

7 Points discrétionnaires (**d**)

Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Le point doit être alors marqué (**d**) et une brève **note** écrite à côté du point doit expliquer sa décision.

8 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **OU BIEN . . . OU BIEN**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi des alignements pour aider les examinateurs à reconnaître où ces solutions alternatives commencent et finissent.

9 Formes alternatives

Sauf si la question impose une forme particulière, acceptez les formes équivalentes.

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** ou **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens), apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

Exemple : Pour la dérivation de $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, le barème de notation propose :

$$f'(x) = (2\cos(5x - 3))5 \quad (= 10\cos(5x - 3)) \quad \text{AI}$$

Attribuez **AI** pour $(2\cos(5x - 3))5$, même si $10\cos(5x - 3)$ n'est pas visible.

10 Précision des réponses

La façon de gérer les erreurs de précision sur l'ensemble d'une épreuve au moyen de la pénalité de précision (AP) ne s'applique plus.

Les instructions concernant ces questions numériques seront fournies aux examinateurs question par question dans le cadre de la correction mathématique, de l'intelligence numérique et de la cohérence contextuelle.

*La rubrique sur la page de garde du sujet de chaque épreuve est donnée pour orienter les candidats. Le barème de notation peut donner des instructions aux examinateurs sous la forme de « acceptez des réponses qui peuvent être arrondies à n chiffres significatifs (cs) ». Lorsque le candidat fournit des réponses, exigées par la question, avec moins de n cs, attribuez **A0**. Des réponses numériques intermédiaires peuvent être requises par le barème de notation mais pas par la question. Dans ce cas accordez seulement le(s) point(s) si le candidat donne la réponse exacte ou avec au moins 2 cs.*

11 Travail barré

Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou si d'une autre façon il a barré son travail, attribuez aucun point pour ce travail.

12 Calculatrice

Aucune calculatrice n'est autorisée. L'utilisation de n'importe quelle calculatrice pour l'épreuve 1 est une fraude, et résultera dans l'absence de note pour l'épreuve. Si vous voyez un travail qui suggère qu'un candidat a utilisé une calculatrice, suivez alors, s'il vous plaît, la procédure concernant les fraudes. Exemple : Trouver un angle, étant donné un rapport trigonométrique de 0,4235.

13 Plusieurs solutions

Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examineur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.

SECTION A

1. (a) $\sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$ *AI*
[1 point]
- (b) $\tan 2\theta = \frac{2 \times \sqrt{8}}{1-8} = -\frac{2\sqrt{8}}{7} \left(-\frac{4\sqrt{2}}{7} \right)$ *MIAI*
[2 points]
- (c) $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$ *MIAI*
 $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ *AI*
[3 points]
Total [6 points]
2. (a) somme = $\frac{45}{9}$, produit = $\frac{40}{9}$ *AI*
[1 point]
- (b) il s'ensuit que $3\alpha = \frac{45}{9}$ et $\alpha(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{40}{9}$ *AIAI*
ce qui donne, $\alpha = \frac{5}{3}$ *AI*
 $\frac{5}{3}\left(\frac{25}{9} - \beta^2\right) = \frac{40}{9}$ *MI*
 $\beta = (\pm)\frac{1}{3}$ *AI*
les deux autres racines sont $2, \frac{4}{3}$ *AI*
[6 points]
Total [7 points]

3. (a) $P(\text{aucune face apr s } n \text{ lancers}) = 0,5^n$ (A1)

$$P(\text{aucune face}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{7}{24}$$

[3 points]

(b) $P(2 \mid \text{aucune face}) = \frac{P(2 \text{ pièces et aucune face})}{P(\text{aucune face})}$ M1

$$= \frac{1}{\frac{12}{24}}$$

$$= \frac{2}{7}$$

[3 points]

Total [6 points]

4. (a) $E(X) = \int_0^1 12x^3(1-x)dx$ M1

$$= 12 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5}$$

[3 points]

(b) $f'(x) = 12(2x - 3x^2)$ A1

au mode, on a $f'(x) = 12(2x - 3x^2) = 0$ M1

donc le mode $= \frac{2}{3}$ A1

[3 points]

Total [6 points]

5. (a) $f(-x) = 2 \cos(-x) + (-x) \sin(-x)$ M1

$$= 2 \cos x + x \sin x \quad (= f(x))$$

donc f est paire A1

[3 points]

(b) $f'(x) = -2 \sin x + \sin x + x \cos x \quad (= -\sin x + x \cos x)$ A1

$$f''(x) = -\cos x + \cos x - x \sin x \quad (= -x \sin x)$$

ainsi $f''(0) = 0$ AG

[2 points]

suite ...

Suite de la question 5

- (c) l'affirmation de John est incorrecte parce que
 ou bien ; il y a un point stationnaire en $(0, 2)$ et puisque f est une fonction
 paire et donc de courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
 Oy , ce point doit être un maximum ou un minimum
 ou bien ; $f''(x)$ est paire et donc a le même signe des deux cotés de $(0, 2)$ **R2**
[2 points]

Total [7 points]

6. (a) $BC^2 = 12 + 81 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 147$ **MIAI**
 $BC = 7\sqrt{3}$ **AI**
[3 points]

- (b) aire du triangle $ABC = \frac{1}{2} \times 9 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \left(= \frac{9\sqrt{3}}{2} \right)$ **MIAI**
 donc $\frac{1}{2} \times AD \times 7\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ **MI**
 $AD = \frac{9}{7}$ **AI**
[4 points]

Total [7 points]

7. (a) en utilisant les opérations sur les lignes,
 pour obtenir 2 équations avec les mêmes 2 inconnues **MI**
 par exemple, $y - z = 1$ **AIAI**
 $2y - 2z = \lambda - 1$
 le fait que l'une des expressions de gauche est un multiple de l'autre
 expression de gauche indique ce système d'équations n'a pas une solution
 unique (ou équivalent) **RIAG**
[4 points]

- (b) (i) $\lambda = 3$ **AI**
 (ii) prendre $z = \mu$ **MI**
 alors $y = 1 + \mu$ **AI**
 et $x = -2\mu$ (ou équivalent) **AI**
[4 points]

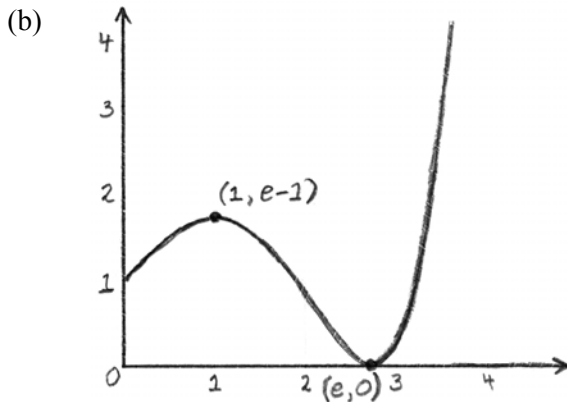
Total [8 points]

8. en évaluant le produit vectoriel par a , *MI*
 $a \times (a + b + c) = a \times 0 = 0$ *AI*
 en utilisant les propriétés algébriques des vecteurs et le fait que $a \times a = 0$, *MI*
 $a \times b + a \times c = 0$ *AI*
 $a \times b = c \times a$ *AG*
 en évaluant le produit vectoriel par b , *MI*
 $b \times (a + b + c) = 0$
 $b \times a + b \times c = 0$ *AI*
 $a \times b = b \times c$ *AG*
 ce qui complète la preuve

[6 points]

9. (a) (i) $f'(x) = e^x - ex^{e-1}$ *AI*
 (ii) par observation, les deux racines sont 1, e *AI AI*

[3 points]



A3

Note : Attribuez *AI* pour le maximum, *AI* pour le minimum et *AI* pour la forme générale.

[3 points]

- (c) à partir de la courbe : $e^x > x^e$ pour tout $x > 0$ sauf $x = e$ *RI*
 en posant $x = \pi$, conclure que $e^\pi > \pi^e$ *AG*

[1 point]

Total [7 points]

SECTION B

10. (a) sous forme cartésienne

$$z_1 = 2 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2}i$$

MI

$$= -\sqrt{3} + i$$

AI

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-\sqrt{3} + i}{-1 + i}$$

$$= \frac{(-\sqrt{3} + i)}{(-1 + i)} \times \frac{(-1 - i)}{(-1 - i)}$$

MI

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}i$$

AI

sous forme module-argument

$$z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 135^\circ$$

AI

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \operatorname{cis} 150^\circ}{\sqrt{2} \operatorname{cis} 135^\circ}$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{cis} 15^\circ$$

AIAI

[7 points]

(b) en égalant les deux expressions de $\frac{z_1}{z_2}$

$$\cos 15^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

AI

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

AI

$$\tan 75^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

MI

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

AI

$$= 2 + \sqrt{3}$$

AI

[5 points]

Total [12 points]

11. (a) soit $x = 2 \sin \theta$ **MI**
 $dx = 2 \cos \theta d\theta$ **AI**
 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos \theta \times 2 \cos \theta d\theta \quad \left(= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \right)$ **AIAI**

Note : Attribuez **AI** pour les bornes **AI** pour l'expression.

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$
AI

$$= 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
AI

$$= 1 + \frac{\pi}{2}$$
AI

[7 points]

(b) $I = [x \arcsin x]_0^{0.5} - \int_0^{0.5} x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ **MIAIAI**

$$= [x \arcsin x]_0^{0.5} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{0.5}$$
AI

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$
AI

[5 points]

(c) $dt = \sec^2 \theta d\theta, \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \rightarrow [0, 1]$ **AI(AI)**

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{dt}{(1+t^2)}}{\frac{3}{(1+t^2)} + \frac{t^2}{(1+t^2)}} \quad \text{MI(AI)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$$
AI

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1$$
AI

$$= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$
AI

[7 points]

Total [19 points]

12. (a) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ *AI*
 $f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x$ *AI*
 $= 2e^x \cos x$ *AI*
 $= 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AG*

[3 points]

(b) $f'''(x) = 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AI*
 $f^{(4)}(x) = 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AI*
 $= 4e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AI*
 $= 4e^x \sin(x + \pi)$ *AI*

[4 points]

(c) la conjecture est que
 $f^{(2n)}(x) = 2^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ *AI*

pour $n = 1$, cette formule donne

$f''(x) = 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ce qui est correct *AI*

supposons le résultat vrai pour $n = k$, (i.e. $f^{(2k)}(x) = 2^k e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$) *MI*

considérons $f^{(2k+1)}(x) = 2^k e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + 2^k e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ *MI*

$f^{(2(k+1))}(x) = 2^k e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + 2^k e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + 2^k e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - 2^k e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

AI

$= 2^{k+1} e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ *AI*

$= 2^{k+1} e^x \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ *AI*

donc vrai pour $n = k \Rightarrow$ vrai pour $n = k + 1$ et puisque vrai pour $n = 1$
 le résultat est démontré par récurrence *RI*

Note : Attribuez le *RI* final seulement si les deux points *M* ont été attribués.

[8 points]

Total [15 points]

13. (a) f continue $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ *MI*
 $4a + 2b = 8$ *AI*
 $f'(x) = \begin{cases} 2, & x < 2 \\ 2ax + b, & 2 < x < 3 \end{cases}$ *AI*
 f' continue $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$
 $4a + b = 2$ *AI*
résoudre simultanément *MI*
pour obtenir $a = -1$ et $b = 6$ *AI*
[6 points]
- (b) pour $x \leq 2$, $f'(x) = 2 > 0$ *AI*
pour $2 < x < 3$, $f'(x) = -2x + 6 > 0$ *AI*
puisque $f'(x) > 0$ pour toute valeur dans le domaine de f , f est croissante *RI*
et elle est donc injective *AG*
[3 points]
- (c) $x = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$ *MI*
 $x = -y^2 + 6y - 5 \Rightarrow y^2 - 6y + x + 5 = 0$ *MI*
 $y = 3 \pm \sqrt{4-x}$
donc
 $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \leq 3 \\ 3 - \sqrt{4-x}, & 3 < x < 4 \end{cases}$ *AIAIAI*

Note : Attribuez *AI* pour la première ligne et *AIAI* pour la seconde ligne.

[5 points]

Total [14 points]



MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Numéro de session du candidat

0	0								
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

SPÉCIMEN D'ÉPREUVE

Code de l'examen

X	X	X	X	–	X	X	X	X
---	---	---	---	---	---	---	---	---

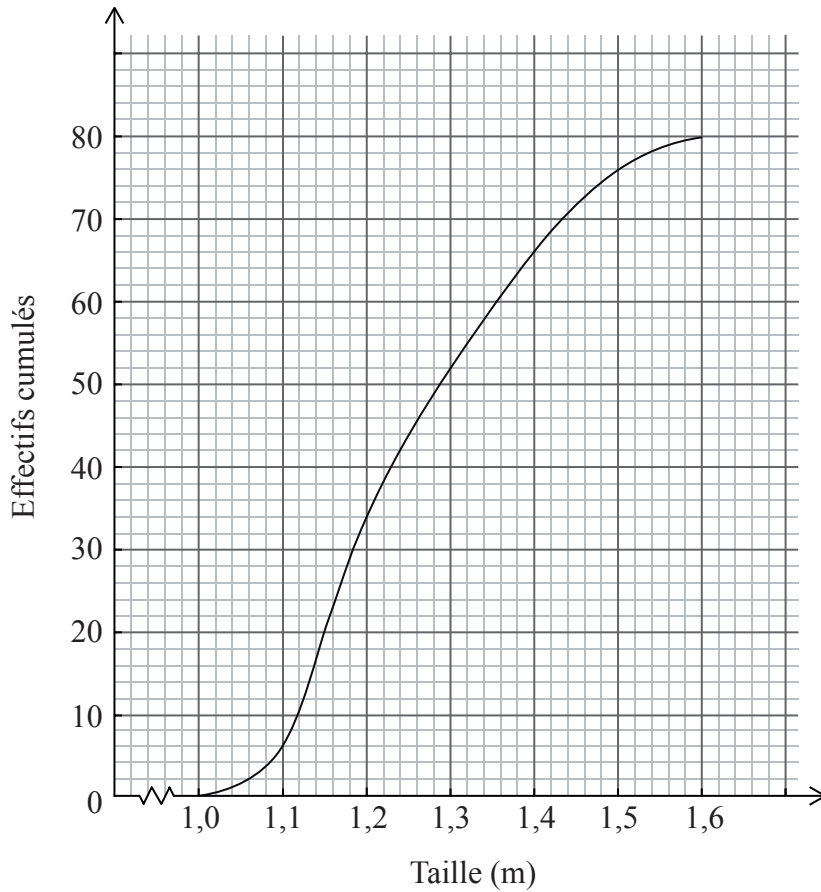
2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toute la section A dans les espaces prévus à cet effet.
- Section B : répondez à toute la section B sur les feuilles de réponses prévues à cet effet. Inscrivez votre numéro de session sur chaque livret de réponse que vous avez utilisé et joignez-les à cette épreuve écrite et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- À la fin de l'examen, indiquez le nombre de feuilles de réponse utilisées dans la case prévue à cet effet sur la couverture du livret.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS* est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est [120 points].

3. [Note maximale : 6]

La taille de tous les garçons qui sont nouveaux dans une école a été mesurée et la courbe des effectifs cumulés suivante a été produite.



(a) Complétez ce tableau des effectifs groupés pour ces données.

[2 points]

Intervalle	Effectif
]1,0 ; 1,1]	
]1,1 ; 1,2]	
]1,2 ; 1,3]	
]1,3 ; 1,4]	
]1,4 ; 1,5]	
]1,5 ; 1,6]	

(Suite de la question à la page suivante)

9. [Note maximale : 7]

Sur un plancher horizontal, une échelle d'une longueur de 10 m est appuyée contre un mur vertical. Le pied de l'échelle est écarté du mur à une vitesse constante de $0,5 \text{ ms}^{-1}$. Calculez la vitesse de descente du haut de l'échelle lorsque le bas de l'échelle est à 4 m du mur.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

SECTION B

Répondez à **toutes** les questions sur les feuilles de réponses fournies. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 12]

Les points A et B ont pour coordonnées (1, 2, 3) et (3, 1, 2) par rapport à une origine O.

- (a) (i) Trouvez $\vec{OA} \times \vec{OB}$.
- (ii) Déterminez l'aire du triangle OAB.
- (iii) Trouvez l'équation cartésienne du plan passant par les points O, A et B. [5 points]
- (b) (i) Trouvez l'équation vectorielle de la droite L_1 passant par les points A et B.

(ii) La droite L_2 a pour équation vectorielle
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminez si L_1 et L_2 sont gauches ou pas. [7 points]

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 13]

Une banque propose un prêt de P \$ au début d'un certain mois à un taux d'intérêts mensuel de I . Les intérêts sont calculés à la fin de chaque mois et ajoutés au montant principal. Un remboursement de R \$ est exigé à la fin de chaque mois. Soit S_n \$ le montant du principal immédiatement après le $n^{\text{ième}}$ remboursement mensuel.

- (a) (i) Trouvez une expression pour S_1 et montrez que

$$S_2 = P \left(1 + \frac{I}{100} \right)^2 - R \left(1 + \left(1 + \frac{I}{100} \right) \right).$$

- (ii) Déterminez une expression similaire pour S_n . À partir de là, montrez que

$$S_n = P \left(1 + \frac{I}{100} \right)^n - \frac{100R}{I} \left(\left(1 + \frac{I}{100} \right)^n - 1 \right). \quad [7 \text{ points}]$$

- (b) Sue emprunte 5000 \$ au taux d'intérêt mensuel de 1%. Elle prévoit de rembourser le prêt sur 5 années (c.-à-d. 60 mois).

- (i) Calculez le remboursement mensuel exigible, en donnant votre réponse avec une précision de deux chiffres après la virgule.
- (ii) Après 20 mois, elle hérite d'un peu d'argent et elle décide de rembourser complètement le prêt à ce moment-là. Combien devra-t-elle rembourser ? Donnez votre réponse au \$ près. [6 points]

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 17]

Les poids, en kg, des oiseaux mâles d'une certaine espèce sont modélisés par une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ .

- (a) Étant donné que 70 % des oiseaux pèsent plus que 2,1 kg et que 25 % des oiseaux pèsent plus que 2,5 kg, calculez la valeur de μ et la valeur de σ . [4 points]
- (b) Un échantillon aléatoire de dix de ces oiseaux est prélevé. Soit X le nombre d'oiseaux dans l'échantillon pesant plus que 2,5 kg.
- (i) Calculez $E(X)$.
- (ii) Calculez la probabilité qu'il y ait exactement cinq de ces oiseaux qui pèsent plus que 2,5 kg.
- (iii) Déterminez la valeur la plus probable de X . [5 points]
- (c) Le nombre des œufs, Y , pondus par les oiseaux femelles de cette espèce pendant la période de nidification est modélisé par une distribution de Poisson de moyenne λ . On sait que $P(Y \geq 2) = 0,80085$, avec une précision de 5 chiffres après la virgule.
- (i) Déterminez la valeur de λ .
- (ii) Calculez la probabilité que deux oiseaux choisis au hasard pondent, à eux deux, un total de deux œufs.
- (iii) Étant donné que les deux oiseaux ont pondu un total de deux œufs à eux deux, calculez la probabilité qu'ils aient pondu un œuf chacun. [8 points]

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

13. [Note maximale : 18]

La fonction f est définie sur le domaine par $[0; 2]$ $f(x) = \ln(x+1) \sin(\pi x)$.

- (a) Déterminez une expression pour $f'(x)$. [3 points]
 - (b) Esquissez la représentation graphique de f et celle de f' dans le même repère, en montrant clairement toutes les abscisses à l'origine. [4 points]
 - (c) Trouvez les abscisses x des deux points d'inflexion de la courbe de f . [2 points]
 - (d) Trouvez l'équation de la normale à la courbe de f en $x = 0,75$, en donnant votre réponse sous la forme $y = mx + c$. [3 points]
 - (e) Considérez les points $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ et $C(c, f(c))$, où a , b et c ($a < b < c$) sont des solutions de l'équation $f(x) = f'(x)$. Trouvez l'aire du triangle ABC. [6 points]
-

Veillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.



BARÈME DE NOTATION

SPÉCIMEN

MATHÉMATIQUES

Niveau supérieur

Épreuve 2

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes doivent être visibles.
- (M)** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- (A)** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- N** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes **ne sont pas** visibles.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

Écrivez les points en rouge sur la copie du candidat, dans la marge de droite.

- Écrivez la **décomposition** détaillée des points attribués en utilisant les abréviations **MI**, **AI**, etc.
- Écrivez le total pour chaque **question** (à la fin de la question) et **l'entourer** d'un cercle.

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **AI**, puisque les points **A** dépendent des points **M** précédent(s), s'il y en a.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, *p.ex.* **MIAI**, cela signifie habituellement **MI** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (*p.ex.* substitution dans une formule) et **AI** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise **(M2)**, **N3**, etc., **ne fractionnez pas** ces points.
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit.

3 Points N

Attribuez des points N pour des réponses correctes si le travail n'est pas visible.

- **N'attribuez pas** un mélange de points **N** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points **N** possibles que le total des points **M**, **A** et **R** ; ce qui est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas l'instruction de montrer les étapes de leur travail.

4 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, *p.ex.* (**MI**), et ils peuvent être attribués seulement s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

5 Points de suivi

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points **A dépendants** ne peut être attribué, mais des points **M** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

6 Erreurs de lecture MR

Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquer une pénalité **MR** de 1 point pour cette question. Attribuer les points comme d'habitude et écrire ensuite $-1(\mathbf{MR})$ à côté du total pour cette question. Soustraire 1 point du total de la question. Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), ne pas attribuer le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).

7 Points discrétionnaires (d)

Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Le point doit être alors marqué (**d**) et une brève **note** écrite à côté du point doit expliquer sa décision.

8 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **OU BIEN . . . OU BIEN**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi des alignements pour aider les examinateurs à reconnaître où ces solutions alternatives commencent et finissent.

9 Formes alternatives

Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** ou **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

Exemple : Pour la dérivation de $f(x) = 2 \sin(5x - 3)$, le barème de notation propose :

$$f'(x) = (2 \cos(5x - 3)) 5 \quad (= 10 \cos(5x - 3)) \quad \mathbf{AI}$$

Attribuez **AI** pour $(2 \cos(5x - 3)) 5$, même si $10 \cos(5x - 3)$ n'est pas visible.

10 Précision des réponses

La façon de gérer les erreurs de précision sur l'ensemble d'une épreuve au moyen de la pénalité de précision (**AP**) ne s'applique plus.

Les instructions concernant ces questions numériques seront fournies aux examinateurs question par question dans le cadre de la correction mathématique, de l'intelligence numérique et de la cohérence contextuelle.

La rubrique sur la page de garde du sujet de chaque épreuve est donnée pour orienter les candidats. Le barème de notation peut donner des instructions aux examinateurs sous la forme de « acceptez des réponses qui peuvent être arrondies à n chiffres significatifs (cs) ». Lorsque le candidat fournit des réponses, exigées par la question, avec moins de n cs, attribuez **A0**. Des réponses numériques intermédiaires peuvent être requises par le barème de notation mais pas par la question. Dans ce cas accordez seulement le(s) point(s) si le candidat donne la réponse exacte ou avec au moins 2 cs.

11 Travail barré

Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou si d'une autre façon il a barré son travail, attribuez aucun point pour ce travail.

12 Plusieurs solutions

Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examineur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.

SECTION A

1. $f(2) = 8 + 4a + 2b - 4 = 0$ *MI*
 $\Rightarrow 4a + 2b = -4$ *AI*
 $f(1) = 1 + a + b - 4 = -6$ *MI*
 $\Rightarrow a + b = -3$ *AI*
ce qui donne, $a = 1, b = -4$ *AIAI*
[6 points]

2. nous savons que $ar^2 = 9$ et $\frac{a}{1-r} = 64$ *AI*
en divisant, $r^2(1-r) = \frac{9}{64}$ *MI*
 $64r^3 - 64r^2 + 9 = 0$ *AI*
 $r = 0,75, a = 16$ *AIAI*
[5 points]

3. (a)
- | Intervalle | Effectif |
|-------------|----------|
|]1,0 ; 1,1] | 6 |
|]1,1 ; 1,2] | 28 |
|]1,2 ; 1,3] | 18 |
|]1,3 ; 1,4] | 14 |
|]1,4 ; 1,5] | 10 |
|]1,5 ; 1,6] | 4 |
- A2*
[2 points]
- (b) $\mu = 1,26, \sigma = 0,133$ *AIAI*
[2 points]
- (c) non, la distribution normale est symétrique et ces données ne le sont pas *R2*
[2 points]
- Total [6 points]*

4. (a) $\text{mod}(z) = 2, \arg(z) = 150^\circ$ *AIAI*
[2 points]
- (b) $z^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$ *(MI)*
 $= 0,810 + 0,965i$ *AI*
[2 points]
- (c) nous devons trouver un multiple de 150 qui est aussi un multiple de 360,
donc par toute méthode, *MI*
 $n = 12$ *AI*

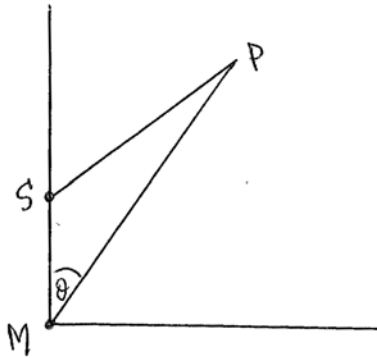
Note : Attribuez seulement 1 point pour la partie (c) si $n = 12$ est justifié par $\arg(z) = -30$.

[2 points]

Total [6 points]

5. (a) (i) déplacement $= \int_0^3 v dt$ (M1)
 $= 0,703$ (m) A1
- (ii) distance totale $= \int_0^3 |v| dt$ (M1)
 $= 2,05$ (m) A1
- [4 points]
- (b) résolvant l'équation $\int_0^t |\cos(u^2)| du = 1$ (M1)
 $t = 1,39$ (s) A1
- [2 points]
- Total [6 points]
-
6. asymptote verticale $x = -4 \Rightarrow -4b + c = 0$ M1
- asymptote horizontale $y = -2 \Rightarrow \frac{1}{b} = -2$ M1
- $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -2$ A1A1
- $1 = \frac{\frac{2}{3} + a}{-\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - 2}$ M1
- $a = -3$ A1
- [6 points]

7.



- (a) soit P le point où l'interception a lieu, t h après 12h00
 alors, $SP = 20t$ et $MP = 30t$
 en utilisant la loi des sinus,

$$\frac{SP}{MP} = \frac{2}{3} = \frac{\sin \theta}{\sin 135^\circ}$$

et donc $\theta = 28,1^\circ$

AI

MIAI

AI

[4 points]

- (b) en utilisant encore la loi des sinus,

$$\frac{MP}{MS} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin (45^\circ - 28,1255\dots^\circ)}$$

$$30t = 10 \times \frac{\sin 135^\circ}{\sin 16,8745\dots^\circ}$$

$$t = 0,81199\dots$$

l'interception a lieu à 12h49

MIAI

MI

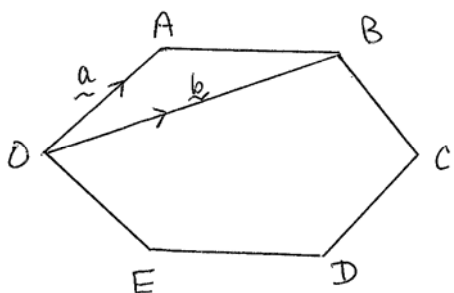
AI

AI

[5 points]

Total [9 points]

8.



(a) $OC = AB + OA \cos 60 + BC \cos 60$
 $= AB + AB \times \frac{1}{2} + AB \times \frac{1}{2}$
 $= 2AB$

MI

AI

AG

[2 points]

(b) $\vec{OC} = 2\vec{AB} = 2(\vec{b} - \vec{a})$

MIAI

$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD}$

MI

$= \vec{OC} + \vec{AO}$

AI

$= 2\vec{b} - 2\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$

AI

$\vec{OE} = \vec{BC}$

MI

$= 2\vec{b} - 2\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - 2\vec{a}$

AI

[7 points]

Total [9 points]

9. soit x, y (m) respectivement la distance du bas de l'échelle au mur et la distance du haut de l'échelle au sol

alors,

$x^2 + y^2 = 100$

MIAI

$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$

MIAI

quand $x = 4, y = \sqrt{84}$ et $\frac{dx}{dt} = 0,5$

AI

en substituant, $2 \times 4 \times 0,5 + 2\sqrt{84} \frac{dy}{dt} = 0$

AI

$\frac{dy}{dt} = -0,218 \text{ ms}^{-1}$

AI

(la vitesse de descente est $0,218 \text{ ms}^{-1}$)

[7 points]

SECTION B

- 10.** (a) (i) $\vec{OA} \times \vec{OB} = i + 7j - 5k$ *AI*
- (ii) aire = $\frac{1}{2} |i + 7j - 5k| = \frac{5\sqrt{3}}{2} (4,33)$ *MIAI*
- (iii) l'équation du plan est $x + 7y - 5z = k$ *MI*
 $x + 7y - 5z = 0$ *AI*
- [5 points]*
- (b) (i) direction de la droite = $(3i + j + 2k) - (i + 2j + 3k) = 2i - j - k$ *MIAI*
 l'équation de la droite est
 $r = (i + 2j + 3k) + \lambda(2i - j - k)$ *AI*
- (ii) en un point d'intersection,
 $1 + 2\lambda = 2 + \mu$
 $2 - \lambda = 4 + 3\mu$ *MIAI*
 $3 - \lambda = 3 + 2\mu$
 en résolvant les 2^e et 3^e équations, $\lambda = 4, \mu = -2$ *AI*
 ces valeurs ne satisfont pas la 1^{ère} équation, donc ces droites sont gauches *RI*
- [7 points]*
- Total [12 points]*

11. (a) (i) $S_1 = P\left(1 + \frac{I}{100}\right) - R$ *AI*

$$S_2 = P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^2 - R\left(1 + \frac{I}{100}\right) - R$$
MIAI

$$= P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^2 - R\left(1 + \left(1 + \frac{I}{100}\right)\right)$$
AG

(ii) en généralisant ceci,

$$S_n = P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - R\left(1 + \left(1 + \frac{I}{100}\right) + \dots + \left(1 + \frac{I}{100}\right)^{n-1}\right)$$
MIAI

$$= P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - \frac{R\left(\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - 1\right)}{\frac{I}{100}}$$
MIAI

$$= P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - \frac{100R}{I}\left(\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - 1\right)$$
AG

[7 points]

(b) (i) posons $S_{60} = 0$, $P = 5\,000$, $I = 1$ *MI*

$$5\,000 \times 1,01^{60} = 100R(1,01^{60} - 1)$$
AI

$$R = 111,22(\$)$$
AI

(ii) posons $n = 20$, $P = 5\,000$, $I = 1$, $R = 111,22$ *MI*

$$S_{20} = 5\,000 \times 1,01^{20} - 100 \times 111,22(1,01^{20} - 1)$$
AI

$$= 3\,652(\$)$$
AI

qui est la somme restant à rembourser

[6 points]

Total [13 points]

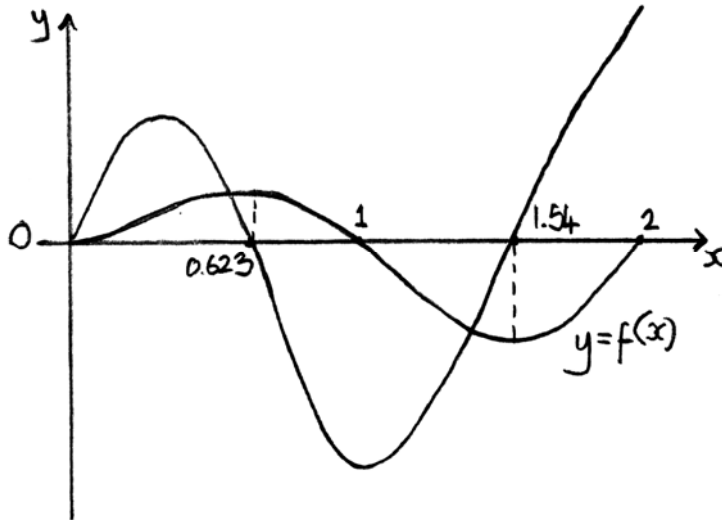
12. (a) nous savons que
 $2,1 = \mu - 0,5244\sigma$
 $2,5 = \mu + 0,6745\sigma$
 $\mu = 2,27, \sigma = 0,334$ *MIAI*
AIAI
- [4 points]*
- (b) (i) soit X le nombre d'oiseaux pesant plus que 2,5 kg
 alors X suit la loi $B(10 ; 0,25)$ *AI*
 $E(X) = 2,5$ *AI*
- (ii) 0,0584 *AI*
- (iii) pour trouver la valeur la plus probable de X , considérons
 $p_0 = 0,0563\dots; p_1 = 0,1877\dots; p_2 = 0,2815\dots; p_3 = 0,2502\dots$ *MI*
 et donc la valeur la plus probable est 2 *AI*
- [5 points]*
- (c) (i) nous résolvons $1 - P(Y \leq 1) = 0,80085$ avec la calculatrice graphique *MI*
 $\lambda = 3,00$ *AI*
- (ii) soit X_1, X_2 le nombre d'œufs pondus par chaque oiseau
 $P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$ *MIAI*
 $= e^{-3} \times e^{-3} \times \frac{9}{2} + (e^{-3} \times 3)^2 + e^{-3} \times \frac{9}{2} \times e^{-3} = 0,0446$ *AI*
- (iii) $P(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_1 + X_2 = 2) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(X_1 + X_2 = 2)}$ *MIAI*
 $= 0,5$ *AI*
- [8 points]*
- Total [17 points]**

13. (a) $f'(x) = \frac{1}{x+1} \sin(\pi x) + \pi \ln(x+1) \cos(\pi x)$

MIAIAI

[3 points]

(b)



A4

Note : Attribuez AIAI pour les courbes, AIAI pour les intersections.

[4 points]

(c) 0,310 ; 1,12

AIAI

[2 points]

(d) $f'(0,75) = -0,839092$

AI

alors l'équation de la normale est $y - 0,39570812 = \frac{1}{0,839092}(x - 0,75)$

MI

$y = 1,19x - 0,498$

AI

[3 points]

(e) A(0 ; 0)

B($\overbrace{0,548\dots}^c$, $\overbrace{0,432\dots}^d$)

AI

C($\overbrace{1,44\dots}^e$, $\overbrace{-0,881\dots}^f$)

AI

Note : Acceptez les coordonnées de B et C arrondies à 3 chiffres significatifs.

aire $\Delta ABC = \frac{1}{2} |(ci + dj) \times (ei + fj)|$

MIAI

$= \frac{1}{2} (de - cf)$

AI

$= 0,554$

AI

[6 points]

Total [18 points]



MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

SPÉCIMEN D'ÉPREUVE

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS* est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est [60 points].

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 9]

- (a) Utilisez l'algorithme euclidien pour trouver le plus grand commun diviseur de 259 et 581. [4 points]
- (b) À partir de là ou par tout autre méthode, trouvez la solution générale de l'équation diophantienne $259x + 581y = 7$. [5 points]

2. [Note maximale : 13]

Le graphe G a pour sommets P, Q, R, S, T et le tableau suivant montre le nombre d'arêtes joignant chaque paire de sommets.

	P	Q	R	S	T
P	0	1	0	1	2
Q	1	0	1	0	0
R	0	1	0	1	1
S	1	0	1	0	0
T	2	0	1	0	0

- (a) Dessinez le graphe G comme un graphe planaire. [2 points]
- (b) En donnant une raison, indiquez si G est ou n'est pas
 - (i) simple ;
 - (ii) connexe ;
 - (iii) biparti. [4 points]
- (c) Expliquez quelle caractéristique de G vous permet d'affirmer qu'il possède une chaîne eulérienne et indiquez une chaîne simple. [2 points]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

- (d) Expliquez quelles caractéristiques de G vous permettent d'affirmer qu'il n'a pas de circuit eulérien. [1 point]
- (e) Trouvez le nombre maximum d'arêtes que l'on peut ajouter au graphe G (en excluant des boucles ou d'autres arêtes multiples) tout en le conservant planaire. [4 points]

3. [Note maximale : 12]

- (a) Une version du petit théorème de Fermat affirme que, sous certaines conditions, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
- (i) Montrez que ce résultat n'est pas vrai pour $a=2$, $p=9$ et indiquez laquelle des conditions n'est pas satisfaite.
- (ii) Trouvez la plus petite valeur positive de k qui vérifie la congruence $2^{45} \equiv k \pmod{9}$. [6 points]
- (b) Trouvez tous les entiers entre 100 et 200 satisfaisant le système de congruences $3x \equiv 4 \pmod{5}$ et $5x \equiv 6 \pmod{7}$. [6 points]

4. [Note maximale : 12]

Les poids des arêtes d'un graphe G de sommets A, B, C, D et E sont donnés dans le tableau suivant.

	A	B	C	D	E
A	–	11	18	12	9
B	11	–	17	13	14
C	18	17	–	16	10
D	12	13	16	–	15
E	9	14	10	15	–

- (a) En commençant du sommet A, utilisez l'algorithme des plus proches voisins pour déterminer une borne supérieure pour le problème du voyageur de commerce pour G . [4 points]
- (b) (i) Utilisez l'algorithme de Kruskal pour trouver et dessiner un arbre couvrant minimal pour le sous-graphe obtenu en enlevant le sommet A de G .
- (ii) À partir de là, utilisez l'algorithme du sommet effacé pour trouver une borne inférieure pour le problème du voyageur de commerce pour G . [8 points]

5. [Note maximale : 14]

- (a) La suite $\{u_n\}$, où $n \in \mathbb{Z}^+$, vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Étant donné que $u_1 = u_2 = 3$, déterminez une expression de u_n en fonction de n . [6 points]
- (b) La suite $\{v_n\}$, où $n \in \mathbb{Z}^+$, vérifie la relation de récurrence $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$. Étant donné que $v_1 = 2$ et $v_2 = 12$, utilisez le principe de récurrence forte pour montrer que $v_n = 2^n(2n-1)$. [8 points]
-



BARÈME DE NOTATION

SPÉCIMEN

MATHÉMATIQUES MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Niveau supérieur

Épreuve 3

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes doivent être visibles.
- (M)** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- (A)** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- N** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes **ne sont pas** visibles.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

Écrivez les points en rouge sur la copie du candidat, dans la marge de droite.

- Écrivez la **décomposition** détaillée des points attribués en utilisant les abréviations **MI**, **AI**, etc.
- Écrivez le total pour chaque **question** (à la fin de la question) et **l'entourer** d'un cercle.

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **AI**, puisque les points **A** dépendent des points **M** précédent(s), s'il y en a.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, *p.ex.* **MIAI**, cela signifie habituellement **MI** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (*p.ex.* substitution dans une formule) et **AI** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise **(M2)**, **N3**, etc., **ne fractionnez pas** ces points.
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit.

3 Points N

Attribuez des points N pour des réponses correctes si le travail n'est pas visible.

- **N'attribuez pas** un mélange de points **N** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points **N** possibles que le total des points **M**, **A** et **R** ; ce qui est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas l'instruction de montrer les étapes de leur travail.

4 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, *p.ex.* (**MI**), et ils peuvent être attribués seulement s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

5 Points de suivi

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points **A dépendants** ne peut être attribué, mais des points **M** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

6 Erreurs de lecture **MR**

Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquer une pénalité **MR** de 1 point pour cette question. Attribuer les points comme d'habitude et écrire ensuite $-1(\mathbf{MR})$ à côté du total pour cette question. Soustraire 1 point du total de la question. Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), ne pas attribuer le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).

7 Points discrétionnaires (*d*)

Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Le point doit être alors marqué (**d**) et une brève **note** écrite à côté du point doit expliquer sa décision.

8 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **OU BIEN . . . OU BIEN**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi des alignements pour aider les examinateurs à reconnaître où ces solutions alternatives commencent et finissent.

9 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** ou **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

Exemple : Pour la dérivation de $f(x) = 2 \sin(5x - 3)$, le barème de notation propose :

$$f'(x) = (2 \cos(5x - 3)) 5 \quad (= 10 \cos(5x - 3)) \quad \mathbf{AI}$$

Attribuez **AI** pour $(2 \cos(5x - 3)) 5$, même si $10 \cos(5x - 3)$ n'est pas visible.

10 Précision des réponses

*La façon de gérer les erreurs de précision sur l'ensemble d'une épreuve au moyen de la pénalité de précision (**AP**) ne s'applique plus.*

Les instructions concernant ces questions numériques seront fournies aux examinateurs question par question dans le cadre de la correction mathématique, de l'intelligence numérique et de la cohérence contextuelle.

*La rubrique sur la page de garde du sujet de chaque épreuve est donnée pour orienter les candidats. Le barème de notation peut donner des instructions aux examinateurs sous la forme de « acceptez des réponses qui peuvent être arrondies à n chiffres significatifs (cs) ». Lorsque le candidat fournit des réponses, exigées par la question, avec moins de n cs, attribuez **A0**. Des réponses numériques intermédiaires peuvent être requises par le barème de notation mais pas par la question. Dans ce cas accordez seulement le(s) point(s) si le candidat donne la réponse exacte ou avec au moins 2 cs.*

11 Travail barré

Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou si d'une autre façon il a barré son travail, attribuez aucun point pour ce travail.

12 Calculatrice

Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (p.ex. TI-89) ne sont pas autorisées.

Notation de type calculatrice

On peut lire dans le guide des mathématiques NS :

Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations telles qu'elles apparaissent sur leur calculatrice.

N'acceptez pas des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

13 Plusieurs solutions

Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examineur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.

1. (a) $581 = 2 \times 259 + 63$
 $259 = 4 \times 63 + 7$
 $63 = 9 \times 7$
 le PGCD est donc 7

MIAI

AI

AI

[4 points]

- (b) considérez
 $7 = 259 - 4 \times 63$
 $= 259 - 4 \times (581 - 2 \times 259)$
 $= 259 \times 9 + 581 \times (-4)$
 la solution générale est donc
 $x = 9 + 83n$; $y = -4 - 37n$, où $n \in \mathbb{Z}$

MI

AI

AI

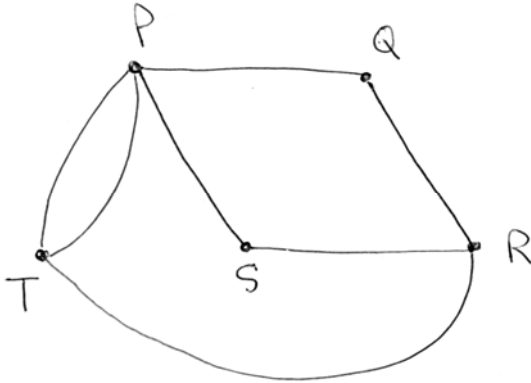
MIAI

Notes : Acceptez les solutions présentées sous forme de tableau. Diviser l'équation diophantienne par 7 est également une solution valide.

[5 points]

Total [9 points]

2. (a)



A2
[2 points]

- (b) (i) G n'est pas simple parce que 2 arêtes joignent P à T RI
- (ii) G est connexe parce qu'il y a une chaîne élémentaire joignant toute paire de sommets RI
- (iii) (P, R) et (Q, S, T) sont les sommets non-joints RI
ainsi G est biparti AI

Note : Attribuez le **AI** seulement si le **RI** est attribué.

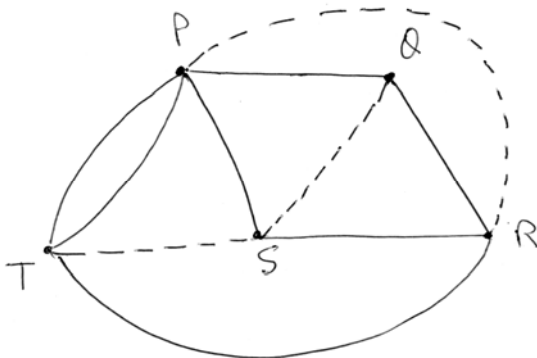
[4 points]

- (c) G a une chaîne eulérienne parce qu'il a deux sommets de degré impair (R et T sont de degré 3), et tous les autres sommets sont de degré pair le chemin suivant en est un exemple TPTRSPQR RI
AI

[2 points]

- (d) G n'a pas de circuit eulérien parce que il y a 2 sommets de degré impair RI
[1 point]

(e) considérez



ainsi, il est possible d'ajouter trois arêtes supplémentaires AI
 considérez G après avoir enlevé l'une des arêtes PT ; c'est alors un graphe simple avec 6 arêtes, avec l'addition des nouvelles arêtes, ce sera toujours un graphe simple MI
 $e \leq 3v - 6 \Rightarrow e \leq 3 \times 5 - 6 = 9$ RI
 ainsi, au maximum 3 arêtes peuvent être ajoutées RI

[4 points]

Total [13 points]

3. (a) (i) $2^8 = 256 \equiv 4 \pmod{9}$ (donc n'est pas vrai) AI
 9 n'est pas un nombre premier AI
- (ii) considérez des puissances successives de 2 , en obtenant *p.ex.* MI
 $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$ AI
 et donc MI
 $2^{45} = (2^6)^7 \times 2^3$ MI
 $\equiv 8 \pmod{9}$ (ainsi $k = 8$) AI

[6 points]

(b) **OU BIEN**

- les solutions de $3x \equiv 4 \pmod{5}$ sont 3, 8, 13, 18, 23, ... MI AI
 les solutions de $5x \equiv 6 \pmod{7}$ sont 4, 11, 18, ... AI
 18 est donc la plus petite solution AI
 la solution générale est MI
 $18 + 35n, n \in \mathbb{Z}$ AI
 les solutions demandées sont donc 123, 158, 193 AI

OU BIEN

- $3x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 2 \times 3x \equiv 2 \times 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5}$ AI
 $\Rightarrow x = 3 + 5t$ MI
 $\Rightarrow 15 + 25t \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 4t \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 2 \times 4t \equiv 2 \times 5 \pmod{7} \Rightarrow t \equiv 3 \pmod{7}$ AI
 $\Rightarrow t = 3 + 7n$ AI
 $\Rightarrow x = 3 + 5(3 + 7n) = 18 + 35n$ MI
 les solutions demandées sont donc 123, 158, 193 AI

OU BIEN

- en utilisant le théorème du reste chinois AI AI
 convertir d'abord les congruences en $x \equiv 3 \pmod{5}$ et $x \equiv 4 \pmod{7}$ AI AI
 $M = 35, M_1 = 7, M_2 = 5, m_1 = 5, m_2 = 7, a_1 = 3, a_2 = 4$
 x_1 est la solution de $M_1 x_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$, c.-à-d. $7x_1 \equiv 1 \pmod{5}$ ainsi $x_1 = 3$
 x_2 est la solution de $M_2 x_2 \equiv 1 \pmod{m_2}$, c.-à-d. $5x_2 \equiv 1 \pmod{7}$ ainsi $x_2 = 3$
 une solution est donc MI
 $x = a_1 M_1 x_1 + a_2 M_2 x_2$ AI
 $= 3 \times 7 \times 3 + 4 \times 5 \times 3 = 123$ AI
 la solution générale est $123 + 35n, n \in \mathbb{Z}$ MI
 les solutions demandées sont donc 123, 158, 193 AI

[6 points]

Total [12 points]

4. (a) en utilisant l'algorithme des plus proches voisins, en commençant au sommet A,

A → E, E → C

C → D, D → B

B → A

la borne supérieure est donc $9 + 10 + 16 + 13 + 11 = 59$

AI

AI

AI

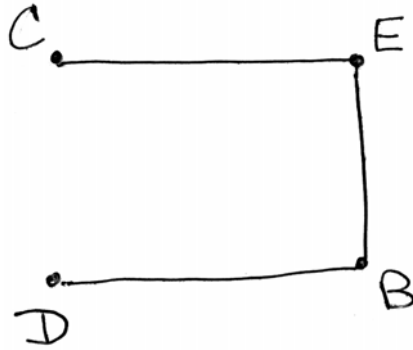
AI

[4 points]

(b) (i) on ajoute successivement les arêtes CE

BD

BE



AI

AI

AI

AI

(ii) le poids de l'arbre couvrant minimum est 37

nous rejoignons maintenant A avec les 2 arêtes de plus faible poids

c.-à-d. AE et AB

la borne inférieure est donc $37 + 9 + 11 = 57$

(AI)

(MI)

AI

AI

[8 points]

Total [12 points]

5. (a) l'équation caractéristique est $m^2 - 5m + 6 = 0$ *MI*
 ce qui donne $m = 2, 3$ *AI*
 la solution générale est $u_n = A \times 2^n + B \times 3^n$ *AI*
 en substituant $n = 1, 2$
 $2A + 3B = 3$ *MI*
 $4A + 9B = 3$ *AI*
 la solution est $A = 3, B = -1$ ce qui donne $u_n = 3 \times 2^n - 3^n$ *AI*

[6 points]

- (b) nous vérifions d'abord $v_n = 2^n (2n - 1)$ pour $n = 1, 2$ *MI*
 pour $n = 1$, cela donne $2 \times 1 = 2$ ce qui est correct
 pour $n = 2$, cela donne $4 \times 3 = 12$ ce qui est correct *AI*
 nous supposons maintenant que le résultat est vrai pour $n \leq k$ *MI*
 considérons
 $v_{k+1} = 4v_k - 4v_{k-1} \quad (k \geq 2)$ *MI*
 $= 4 \cdot 2^k (2k - 1) - 4 \cdot 2^{k-1} (2k - 3)$ *AI*
 $= 2^{k+1} (4k - 2 - 2k + 3)$ *AI*
 $= 2^{k+1} (2(k + 1) - 1)$ *AI*
 ceci prouve que si le résultat est vrai pour $n \leq k$, alors il est vrai pour $n \leq k + 1$
 puisque nous avons aussi vérifié qu'il était vrai pour $n \leq 2$, le résultat
 général est prouvé par récurrence *RI*

Note : Il faut que les étapes de la récurrence aient été raisonnablement tentées pour que le point final **RI** soit attribué.

[8 points]

Total [14 points]



MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – ANALYSE

SPÉCIMEN D'ÉPREUVE

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS* est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est [60 points].

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 14]

La fonction f est définie sur le domaine $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \ln(1 + \sin x)$.

(a) Montrez que $f''(x) = -\frac{1}{(1 + \sin x)}$. [4 points]

(b) (i) Trouvez la série de Maclaurin pour $f(x)$ jusqu'au terme en x^4 inclusivement.

(ii) Expliquez brièvement pourquoi votre résultat montre que f n'est ni une fonction paire ni une fonction impaire. [7 points]

(c) Déterminez la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - x}{x^2}$. [3 points]

2. [Note maximale : 8]

On considère l'équation différentielle

$$x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x > 0, \quad x^2 > y^2.$$

(a) Montrez qu'il s'agit d'une équation différentielle homogène. [1 point]

(b) Trouvez la solution générale et donnez votre réponse sous la forme $y = f(x)$. [7 points]

3. [Note maximale : 15]

On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x + y \tan x, \text{ étant donné que } y = 1 \text{ lorsque } x = 0.$$

Le domaine de la fonction y est $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) En trouvant les valeurs des dérivées successives en $x = 0$, trouvez la série de Maclaurin pour y jusqu'au terme en x^3 inclusivement. [6 points]

(b) (i) Dérivez la fonction $e^x(\sin x + \cos x)$ et à partir de là montrer que

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c.$$

(ii) Trouvez un facteur intégrant pour cette équation différentielle et à partir de là, trouvez la solution de l'équation sous la forme $y = f(x)$. [9 points]

4. [Note maximale : 10]

Soit $f(x) = 2x + |x|$, où $x \in \mathbb{R}$.

(a) Prouvez que f est continue mais n'est pas dérivable au point $(0 ; 0)$. [7 points]

(b) Déterminez la valeur de $\int_{-a}^a f(x) \, dx$, où $a > 0$. [3 points]

5. [Note maximale : 13]

Considérez la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^n}{n^2 \times 2^n}$.

(a) Trouvez le rayon de convergence. [4 points]

(b) Trouvez l'intervalle de convergence. [9 points]



BARÈME DE NOTATION

SPÉCIMEN

MATHÉMATIQUES ANALYSE

Niveau supérieur

Épreuve 3

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes doivent être visibles.
- (M)** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- (A)** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- N** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes **ne sont pas** visibles.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

Écrivez les points en rouge sur la copie du candidat, dans la marge de droite.

- Écrivez la **décomposition** détaillée des points attribués en utilisant les abréviations **MI**, **AI**, etc.
- Écrivez le total pour chaque **question** (à la fin de la question) et **l'entourer** d'un cercle.

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **AI**, puisque les points **A** dépendent des points **M** précédent(s), s'il y en a.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, *p.ex.* **MIAI**, cela signifie habituellement **MI** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (*p.ex.* substitution dans une formule) et **AI** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise **(M2)**, **N3**, etc., **ne fractionnez pas** ces points.
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit.

3 Points N

Attribuez des points N pour des réponses correctes si le travail n'est pas visible.

- **N'attribuez pas** un mélange de points **N** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points **N** possibles que le total des points **M**, **A** et **R** ; ce qui est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas l'instruction de montrer les étapes de leur travail.

4 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, *p.ex.* (**MI**), et ils peuvent être attribués seulement s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

5 Points de suivi

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points **A dépendants** ne peut être attribué, mais des points **M** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

6 Erreurs de lecture **MR**

Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquer une pénalité **MR** de 1 point pour cette question. Attribuer les points comme d'habitude et écrire ensuite $-1(\mathbf{MR})$ à côté du total pour cette question. Soustraire 1 point du total de la question. Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), ne pas attribuer le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).

7 Points discrétionnaires (*d*)

Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Le point doit être alors marqué (**d**) et une brève **note** écrite à côté du point doit expliquer sa décision.

8 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **OU BIEN . . . OU BIEN**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi des alignements pour aider les examinateurs à reconnaître où ces solutions alternatives commencent et finissent.

9 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** ou **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

Exemple : Pour la dérivation de $f(x) = 2 \sin(5x - 3)$, le barème de notation propose :

$$f'(x) = (2 \cos(5x - 3)) 5 \quad (= 10 \cos(5x - 3)) \quad \mathbf{AI}$$

Attribuez **AI** pour $(2 \cos(5x - 3)) 5$, même si $10 \cos(5x - 3)$ n'est pas visible.

10 Précision des réponses

*La façon de gérer les erreurs de précision sur l'ensemble d'une épreuve au moyen de la pénalité de précision (**AP**) ne s'applique plus.*

Les instructions concernant ces questions numériques seront fournies aux examinateurs question par question dans le cadre de la correction mathématique, de l'intelligence numérique et de la cohérence contextuelle.

*La rubrique sur la page de garde du sujet de chaque épreuve est donnée pour orienter les candidats. Le barème de notation peut donner des instructions aux examinateurs sous la forme de « acceptez des réponses qui peuvent être arrondies à n chiffres significatifs (cs) ». Lorsque le candidat fournit des réponses, exigées par la question, avec moins de n cs, attribuez **A0**. Des réponses numériques intermédiaires peuvent être requises par le barème de notation mais pas par la question. Dans ce cas accordez seulement le(s) point(s) si le candidat donne la réponse exacte ou avec au moins 2 cs.*

11 Travail barré

Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou si d'une autre façon il a barré son travail, attribuez aucun point pour ce travail.

12 Calculatrice

Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (p.ex. TI-89) ne sont pas autorisées.

Notation de type calculatrice

On peut lire dans le guide des mathématiques NS :

Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations telles qu'elles apparaissent sur leur calculatrice.

N'acceptez pas des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

13 Plusieurs solutions

Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examineur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.

1. (a) $f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ *AI*

$f''(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2}$ *MIAI*

$= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2}$ *AI*

$= -\frac{1}{1 + \sin x}$ *AG*

[4 points]

(b) (i) $f'''(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$ *AI*

$f^{(4)}(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x)^2 - 2(1 + \sin x)\cos^2 x}{(1 + \sin x)^4}$ *MIAI*

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1$ *MI*

$f'''(0) = 1, f^{(4)}(0) = -2$ *AI*

$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \dots$ *AI*

(ii) la série contient des puissances de x paires et impaires *RI*

[7 points]

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots - x}{x^2}$ *MI*

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \dots}{1}$ *(AI)*

$= -\frac{1}{2}$ *AI*

Note: L'utilisation de la règle de l'Hôpital est acceptable aussi.

[3 points]

Total [14 points]

2. (a) l'équation peut être écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

AI

ainsi, l'équation différentielle est homogène

AG

[1 point]

- (b) poser $y = vx$ de tel sorte que $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

MIAI

en substituant,

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 - v^2}$$

MI

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

MI

$$\arcsin v = \ln x + C$$

AI

$$\frac{y}{x} = \sin(\ln x + C)$$

AI

$$y = x \sin(\ln x + C)$$

AI

[7 points]

Total [8 points]

3. (a) nous notons que $y(0) = 1$ et que $y'(0) = 2$ *AI*
 $y'' = 2e^x + y' \tan x + y \sec^2 x$ *MI*
 $y''(0) = 3$ *AI*
 $y''' = 2e^x + y'' \tan x + 2y' \sec^2 x + 2y \sec^2 x \tan x$ *MI*
 $y'''(0) = 6$ *AI*
 la série de Maclaurin solution est donc
 $y = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + x^3 + \dots$ *AI*
- [6 points]**
- (b) (i) $\frac{d}{dx}(e^x(\sin x + \cos x)) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$ *MI*
 $= 2e^x \cos x$ *AI*
 il s'en suit que
 $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + c$ *AG*
- (ii) l'équation différentielle peut être écrite sous la forme
 $\frac{dy}{dx} - y \tan x = 2e^x$ *MI*
 $FI = e^{\int -\tan x dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x$ *MIAI*
 $\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = 2e^x \cos x$ *MI*
 en intégrant,
 $y \cos x = e^x(\sin x + \cos x) + C$ *AI*
 $y = 1$ lorsque $x = 0$ donne $C = 0$ *MI*
 et donc
 $y = e^x(1 + \tan x)$ *AI*
- [9 points]**
- Total [15 points]**

4. (a) nous notons que $f(0) = 0$, $f(x) = 3x$ pour $x > 0$ et $f(x) = x$ pour $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \quad \text{MIAI}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0 \quad \text{AI}$$

puisque $f(0) = 0$, la fonction est continue en $x = 0$ AG

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{MIAI}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = 3 \quad \text{AI}$$

ces limites ne sont pas égales RI

ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$ AG

[7 points]

(b) $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 x dx + \int_0^a 3x dx$ MI

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^0 + \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^a \quad \text{AI}$$

$$= a^2 \quad \text{AI}$$

[3 points]

Total [10 points]

5. (a) en utilisant le critère de d'Alembert, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nx^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \times \frac{n^2 2^n}{(n-1)x^n}$ *MI*

$$= \frac{n^3}{(n+1)^2(n-1)} \times \frac{x}{2} \quad \text{AI}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{2} \quad \text{AI}$$

le rayon de convergence R vérifie

$$\frac{R}{2} = 1, \text{ donc } R = 2$$

AI

[4 points]

(b) dans le cas $x = 2$, la série devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n^2}$$

en utilisant le test de comparaison de la limite du quotient avec la série harmonique

MI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ qui diverge}$$

et en considérant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1 \quad \text{AI}$$

la série est donc divergente pour $x = 2$ *AI*

dans le cas $x = -2$, la série devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n^2} \times (-1)^n$$

qui est une série alternée dont le $n^{\text{ième}}$ terme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ *AI*

considérant $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ *MI*

$$f'(x) = \frac{2-x}{x^3} \quad \text{AI}$$

qui est négatif pour $x > 2$ et donc la suite $\{|u_n|\}$ est, après un certain rang, décroissante *RI*

la série est donc convergente quand $x = -2$ par le test des séries alternées *RI*

l'intervalle de convergence est donc $[-2, 2[$ *AI*

[9 points]

Total [13 points]



MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPES

SPÉCIMEN D'ÉPREUVE

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS* est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est [60 points].

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 14]

- (a) La relation R est définie sur \mathbb{Z}^+ par aRb si et seulement si ab est pair. Montrez que seulement une des conditions pour que R soit une relation d'équivalence est satisfaite. [5 points]
- (b) La relation S est définie sur \mathbb{Z}^+ par aSb si et seulement si $a^2 \equiv b^2 \pmod{6}$.
- (i) Montrez que S est une relation d'équivalence.
- (ii) Pour chaque classe d'équivalence, donnez les quatre plus petits éléments. [9 points]

2. [Note maximale : 13]

Les opérations binaires \odot et $*$ sont définies sur \mathbb{R}^+ par

$$a \odot b = \sqrt{ab} \text{ et } a * b = a^2 b^2.$$

Déterminez si oui ou non

- (a) \odot est commutative ; [2 points]
- (b) $*$ est associative ; [4 points]
- (c) $*$ est distributive sur \odot ; [4 points]
- (d) \odot a un élément neutre. [3 points]

3. [Note maximale : 16]

Le groupe $\{G, \times_7\}$ est défini sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, où \times_7 représente la multiplication modulo 7.

- (a) (i) Écrivez la table d'opération pour $\{G, \times_7\}$.
- (ii) Déterminez si $\{G, \times_7\}$ est cyclique ou pas.
- (iii) Trouvez le sous-groupe de G d'ordre 3, en le notant H .
- (iv) Identifiez l'élément d'ordre 2 dans G et trouvez sa classe selon H . [10 points]

(b) Le groupe $\{K, \circ\}$ est défini sur les six permutations des entiers 1, 2, 3 et \circ représente la composition des permutations.

- (i) Montrez que $\{K, \circ\}$ n'est pas abélien.
- (ii) En justifiant votre réponse, indiquez si $\{G, \times_7\}$ et $\{K, \circ\}$ sont isomorphes ou pas. [6 points]

4. [Note maximale : 9]

Les groupes $\{G, *\}$ et $\{H, \odot\}$ sont définis par les tables d'opérations suivantes.

G

$*$	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	A	E
C	C	B	E	A

H

\odot	e	a
e	e	a
a	a	e

En considérant une fonction appropriée de G vers H , montrez qu'un homomorphisme surjectif existe entre ces deux groupes. Indiquez le noyau de cet homomorphisme.

5. [Note maximale : 8]

Soit $\{G, *\}$ un groupe fini et soit H un sous-ensemble non vide de G . Prouvez que $\{H, *\}$ est un groupe si H est fermé pour $*$.



BARÈME DE NOTATION

SPÉCIMEN

MATHÉMATIQUES ENSEMBLES, RELATIONS ET GROUPES

Niveau supérieur

Épreuve 3

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes doivent être visibles.
- (M)** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- (A)** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- N** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes **ne sont pas** visibles.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

Écrivez les points en rouge sur la copie du candidat, dans la marge de droite.

- Écrivez la **décomposition** détaillée des points attribués en utilisant les abréviations **MI**, **AI**, etc.
- Écrivez le total pour chaque **question** (à la fin de la question) et **l'entourer** d'un cercle.

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **AI**, puisque les points **A** dépendent des points **M** précédent(s), s'il y en a.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, *p.ex.* **MIAI**, cela signifie habituellement **MI** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (*p.ex.* substitution dans une formule) et **AI** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise **(M2)**, **N3**, etc., **ne fractionnez pas** ces points.
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit.

3 Points N

Attribuez des points N pour des réponses correctes si le travail n'est pas visible.

- **N'attribuez pas** un mélange de points **N** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points **N** possibles que le total des points **M**, **A** et **R** ; ce qui est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas l'instruction de montrer les étapes de leur travail.

4 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, *p.ex.* (**MI**), et ils peuvent être attribués seulement s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

5 Points de suivi

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points **A dépendants** ne peut être attribué, mais des points **M** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

6 Erreurs de lecture **MR**

Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquer une pénalité **MR** de 1 point pour cette question. Attribuer les points comme d'habitude et écrire ensuite $-1(\mathbf{MR})$ à côté du total pour cette question. Soustraire 1 point du total de la question. Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), ne pas attribuer le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).

7 Points discrétionnaires (*d*)

Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Le point doit être alors marqué (**d**) et une brève **note** écrite à côté du point doit expliquer sa décision.

8 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **OU BIEN . . . OU BIEN**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi des alignements pour aider les examinateurs à reconnaître où ces solutions alternatives commencent et finissent.

9 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** ou **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

Exemple : Pour la dérivation de $f(x) = 2 \sin(5x - 3)$, le barème de notation propose :

$$f'(x) = (2 \cos(5x - 3)) 5 \quad (= 10 \cos(5x - 3)) \quad \mathbf{AI}$$

Attribuez **AI** pour $(2 \cos(5x - 3)) 5$, même si $10 \cos(5x - 3)$ n'est pas visible.

10 Précision des réponses

La façon de gérer les erreurs de précision sur l'ensemble d'une épreuve au moyen de la pénalité de précision (AP) ne s'applique plus.

Les instructions concernant ces questions numériques seront fournies aux examinateurs question par question dans le cadre de la correction mathématique, de l'intelligence numérique et de la cohérence contextuelle.

*La rubrique sur la page de garde du sujet de chaque épreuve est donnée pour orienter les candidats. Le barème de notation peut donner des instructions aux examinateurs sous la forme de « acceptez des réponses qui peuvent être arrondies à n chiffres significatifs (cs) ». Lorsque le candidat fournit des réponses, exigées par la question, avec moins de n cs, attribuez **A0**. Des réponses numériques intermédiaires peuvent être requises par le barème de notation mais pas par la question. Dans ce cas accordez seulement le(s) point(s) si le candidat donne la réponse exacte ou avec au moins 2 cs.*

11 Travail barré

Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou si d'une autre façon il a barré son travail, attribuez aucun point pour ce travail.

12 Calculatrice

Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (p.ex. TI-89) ne sont pas autorisées.

Notation de type calculatrice

On peut lire dans le guide des mathématiques NS :

Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations telles qu'elles apparaissent sur leur calculatrice.

N'acceptez pas des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

13 Plusieurs solutions

Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examineur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.

1. (a) réflexivité : si a est impair, $a \times a$ est impair ainsi R n'est pas réflexive **RI**
 symétrie : si ab est pair ba est pair ainsi R est symétrique **RI**
 transitivité : soit aRb et bRc ; il est nécessaire de déterminer si aRc est vrai ou pas **(MI)**
 par exemple $5R2$ et $2R3$ **AI**
 puisque 5×3 n'est pas pair, $5R3$ est faux et R n'est pas transitive **RI**
[5 points]
- (b) (i) réflexivité : $a^2 \equiv a^2 \pmod{6}$ ainsi S est réflexive **RI**
 symétrie : $a^2 \equiv b^2 \pmod{6} \Rightarrow 6 \mid (a^2 - b^2) \Rightarrow 6 \mid (b^2 - a^2) \Rightarrow b^2 \equiv a^2 \pmod{6}$ **RI**
 ainsi S est symétrique
 transitivité : soit aSb et bSc c.-à-d. que $a^2 = b^2 + 6M$ et $b^2 = c^2 + 6N$ **MI**
 alors $a^2 = c^2 + 6(M + N)$ et aSc ainsi S est transitive **RI**
 S est une relation d'équivalence car elle satisfait les trois conditions **AG**
- (ii) en considérant les carrés des entiers (mod 6), les classes d'équivalence **(MI)**
 sont
 $\{1, 5, 7, 11, \dots\}$ **AI**
 $\{2, 4, 8, 10, \dots\}$ **AI**
 $\{3, 9, 15, 21, \dots\}$ **AI**
 $\{6, 12, 18, 24, \dots\}$ **AI**
[9 points]

Total [14 points]

2. (a) $a \odot b = \sqrt{ab} = \sqrt{ba} = b \odot a$ **AI**
 puisque $a \in b = b \in a$, il s'ensuit que \odot est commutative **RI**
[2 points]
- (b) $a * (b * c) = a * b^2 c^2 = a^2 b^4 c^4$ **MIAI**
 $(a * b) * c = a^2 b^2 * c = a^4 b^4 c^2$ **AI**
 ces résultats sont différents, et donc $*$ n'est pas associative **RI**

Note : Acceptez un contre-exemple numérique.

[4 points]

- (c) $a * (b \odot c) = a * \sqrt{bc} = a^2 bc$ **MIAI**
 $(a * b) \odot (a * c) = a^2 b^2 \odot a^2 c^2 = a^2 bc$ **AI**
 ces résultats sont égaux, ainsi $*$ est distributive sur \odot **RI**
[4 points]
- (d) l'élément neutre e devrait vérifier **MI**
 $a \odot e = a$ pour tout a **MI**
 mais $a \odot e = \sqrt{ae} = a \Rightarrow e = a$ **AI**
 donc, il n'y a pas d'élément neutre **AI**
[3 points]

Total [13 points]

3. (a) (i) la table d'opérations est

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

A3

Note : Enlevez 1 point pour chaque erreur jusqu'à un maximum de 3.

(ii) en considérant les puissances des éléments, (MI)
 il s'ensuit que 3 (ou 5) est d'ordre 6 AI
 ainsi le groupe est cyclique AI

(iii) nous voyons que 2 et 4 sont d'ordre 3 ainsi, le sous-groupe d'ordre 3 est
 $H = \{1, 2, 4\}$ MIAI

(iv) l'élément d'ordre 2 est 6 AI
 sa classe selon H est $\{3, 5, 6\}$ AI

[10 points]

(b) (i) considérons par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{MIAI}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{MIAI}$$

Note : Attribuez *MIAIMIA0* si les deux compositions sont faites dans le mauvais sens.

Note : Attribuez *MIAIM0A0* si les deux compositions donnent le même résultat, si aucune tentative supplémentaire n'est faite pour trouver deux permutations qui ne commutent pas.

ces résultats sont différents, ainsi le groupe n'est pas abélien RIAG

(ii) ils ne sont pas isomorphes parce que $\{G, \times_7\}$ est abélien
 et $\{K, \circ\}$ ne l'est pas RI

[6 points]

Total [16 points]

4. considérez la fonction f donnée par

$$\begin{aligned} f(E) &= e \\ f(A) &= e \\ f(B) &= a \\ f(C) &= a \end{aligned}$$

MIAI

alors on doit montrer que

$$f(X * Y) = f(X) \odot f(Y) \text{ pour tout } X, Y \in G$$

(MI)

considérons

$$f((E \text{ ou } A) * (E \text{ ou } A)) = f(E \text{ ou } A) = e; f(E \text{ ou } A) \odot f(E \text{ ou } A) = e \odot e = e$$

MIAI

$$f((E \text{ ou } A) * (B \text{ ou } C)) = f(B \text{ ou } C) = a; f(E \text{ ou } A) \odot f(B \text{ ou } C) = e \odot a = a$$

AI

$$f((B \text{ ou } C) * (B \text{ ou } C)) = f(B \text{ ou } C) = a; f(B \text{ ou } C) \odot f(B \text{ ou } C) = a \odot a = e$$

AI

puisque les groupes sont abéliens, il n'est pas nécessaire de considérer

$$f((B \text{ ou } C) * (E \text{ ou } A))$$

RI

la propriété souhaitée est satisfaite dans tous les cas de figure, donc l'homomorphisme existe

Note : Une preuve systématique utilisant des tables est acceptable.

le noyau est $\{E, A\}$

AI

[9 points]

5. l'associativité est induite de G

RI

la fermeture est donnée

RI

soit $h \in H$ et soit n l'ordre de h , (il est fini parce que G est fini)

MI

il s'ensuit que $h^n = e$, l'élément neutre

RI

et puisque H est fermé, $e \in H$

RI

puisque $h * h^{n-1} = e$

MI

il s'ensuit que h^{n-1} est le symétrique, h^{-1} , de h

RI

et puisque H est fermé, $h^{-1} \in H$, de sorte que chaque élément de H possède un

élément symétrique

RI

les quatre conditions pour que H soit un groupe sont donc satisfaites

AG

[8 points]



MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

SPÉCIMEN D'ÉPREUVE

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS* est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 10]

Un client achète 12 pommes à l'étalage du marché et les pèse avec les résultats suivants (en grammes).

117 ; 124 ; 129 ; 118 ; 124 ; 116 ; 121 ; 126 ; 118 ; 121 ; 122 ; 129

Vous pouvez supposer qu'il s'agit d'un échantillon aléatoire provenant d'une distribution normale de moyenne μ et de variance σ^2 .

- (a) Déterminez des estimations sans biais de μ et de σ^2 . [3 points]
- (b) Déterminez un intervalle de confiance à 99 % pour μ . [2 points]
- (c) Le marchand affirme que le poids moyen des pommes est 125 grammes mais le client affirme que la moyenne est inférieure à cette valeur.
- (i) Indiquez des hypothèses appropriées pour tester ces affirmations.
- (ii) Calculez la valeur- p de l'échantillon ci-dessus.
- (iii) En justifiant votre réponse, indiquez quelle affirmation est confirmée par votre valeur p en utilisant un niveau de signification de 5 %. [5 points]

2. [Note maximale : 12]

Lorsqu'Andrew lance une fléchette sur une cible, la probabilité qu'il l'atteigne est $\frac{1}{3}$;

lorsque Bill lance une fléchette sur la cible, la probabilité qu'il l'atteigne est $\frac{1}{4}$.

Les lancers successifs sont indépendants. Un soir, ils lancent des fléchettes alternativement vers la cible, en commençant par Andrew, et en s'arrêtant dès que l'une de leurs fléchettes atteint la cible. Soit X le nombre total de fléchettes lancées.

(a) Écrivez la valeur de $P(X = 1)$ et montrez que $P(X = 2) = \frac{1}{6}$. [2 points]

(b) Montrez que la fonction génératrice pour la variable aléatoire X est donnée par

$$G(t) = \frac{2t + t^2}{6 - 3t^2}. \quad [6 \text{ points}]$$

(c) À partir de là, déterminez $E(X)$. [4 points]

3. [Note maximale : 9]

On sait que les poids des adultes d'une certaine espèce de singes sont normalement distribués, avec une moyenne de 30 kg et un écart-type de 3 kg pour les mâles, et avec une moyenne de 20 kg et un écart-type de 2,5 kg pour les femelles.

(a) Trouvez la probabilité que le poids d'un mâle choisi au hasard soit supérieur à deux fois le poids d'une femelle choisie au hasard. [5 points]

(b) Deux mâles et cinq femelles se tiennent ensemble sur une balance. Trouvez la probabilité que leur poids total soit inférieur à 175 kg. [4 points]

4. [Note maximale : 15]

Les élèves d'une classe passent un examen en mathématiques appliquées qui consiste en deux épreuves. L'épreuve 1 porte sur la mécanique et l'épreuve 2 porte sur les statistiques. Les notes obtenues par les élèves dans l'épreuve 1 et dans l'épreuve 2 sont notées par $(x ; y)$ respectivement et vous pouvez supposer que les valeurs de $(x ; y)$ forment un échantillon aléatoire d'une distribution normale bivariée ayant ρ comme coefficient de corrélation. Le professeur souhaite déterminer s'il y a une correspondance positive entre les notes de mécanique et les notes de statistiques ou pas.

(a) Indiquez des hypothèses appropriées.

[1 point]

Les notes obtenues par les 12 élèves qui ont passé les deux épreuves sont données dans le tableau suivant.

Élève	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
x	52	47	82	69	38	50	72	46	23	60	42	53
y	55	44	79	62	41	37	71	44	31	45	47	49

(b) (i) Déterminez le coefficient de corrélation pour ces données et indiquez sa valeur p .

(ii) Interprétez votre valeur- p dans le contexte de ce problème.

[5 points]

(c) George a obtenu une note de 63 pour l'épreuve 1, mais n'a pas pu passer l'épreuve 2 pour cause de maladie. Prédisez la note qu'il aurait obtenue à l'épreuve 2.

[4 points]

(d) Une autre classe de 16 élèves a passé des examens de physique et de chimie et le calcul du coefficient de corrélation entre les notes pour ces deux épreuves a donné 0,524. En utilisant un niveau de signification de 1 %, déterminez si cette valeur suggère une correspondance positive entre les notes de physique et les notes de chimie ou non.

[5 points]

5. [Note maximale : 14]

La variable aléatoire discrète X a la distribution de probabilités suivante avec $0 < \theta < \frac{1}{3}$.

x	1	2	3
$P(X = x)$	θ	2θ	$1 - 3\theta$

- (a) Déterminez $E(X)$ et montrez que $\text{Var}(X) = 6\theta - 16\theta^2$. [4 points]

De façon à estimer θ , un échantillon aléatoire de n observations de la distribution de X est prélevé.

- (b) (i) Étant donné que \bar{X} représente la moyenne de cet échantillon, montrez que

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3 - \bar{X}}{4}$$

est un estimateur sans biais de θ et écrivez une expression pour la variance de $\hat{\theta}_1$ en fonction de n et de θ .

- (ii) Soit Y le nombre d'observations qui sont égales à 1 dans l'échantillon. Montrez que Y suit une distribution binomiale $B(n, \theta)$ et déduisez que

$\hat{\theta}_2 = \frac{Y}{n}$ est un autre estimateur sans biais de θ . Obtenez une expression pour la variance de $\hat{\theta}_2$.

- (iii) Montrez que $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$ et indiquez, en le justifiant, lequel est l'estimateur le plus efficace, $\hat{\theta}_1$ ou $\hat{\theta}_2$. [10 points]



BARÈME DE NOTATION

SPÉCIMEN

MATHÉMATIQUES STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Niveau supérieur

Épreuve 3

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes doivent être visibles.
- (M)** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- (A)** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- N** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes **ne sont pas** visibles.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

Écrivez les points en rouge sur la copie du candidat, dans la marge de droite.

- Écrivez la **décomposition** détaillée des points attribués en utilisant les abréviations **MI**, **AI**, etc.
- Écrivez le total pour chaque **question** (à la fin de la question) et **l'entourer** d'un cercle.

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **AI**, puisque les points **A** dépendent des points **M** précédent(s), s'il y en a.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, *p.ex.* **MIAI**, cela signifie habituellement **MI** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (*p.ex.* substitution dans une formule) et **AI** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise **(M2)**, **N3**, etc., **ne fractionnez pas** ces points.
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit.

3 Points N

Attribuez des points N pour des réponses correctes si le travail n'est pas visible.

- **N'attribuez pas** un mélange de points **N** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points **N** possibles que le total des points **M**, **A** et **R** ; ce qui est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas l'instruction de montrer les étapes de leur travail.

4 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, *p.ex.* (**MI**), et ils peuvent être attribués seulement s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

5 Points de suivi

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points **A dépendants** ne peut être attribué, mais des points **M** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

6 Erreurs de lecture **MR**

Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquer une pénalité **MR** de 1 point pour cette question. Attribuer les points comme d'habitude et écrire ensuite $-1(\mathbf{MR})$ à côté du total pour cette question. Soustraire 1 point du total de la question. Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière.

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (*p.ex.* $\sin \theta = 1,5$), ne pas attribuer le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).

7 Points discrétionnaires (*d*)

Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Le point doit être alors marqué (**d**) et une brève **note** écrite à côté du point doit expliquer sa décision.

8 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **OU BIEN . . . OU BIEN**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi des alignements pour aider les examinateurs à reconnaître où ces solutions alternatives commencent et finissent.

9 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** ou **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

Exemple : Pour la dérivation de $f(x) = 2 \sin(5x - 3)$, le barème de notation propose :

$$f'(x) = (2 \cos(5x - 3)) 5 \quad (= 10 \cos(5x - 3)) \quad \mathbf{AI}$$

Attribuez **AI** pour $(2 \cos(5x - 3)) 5$, même si $10 \cos(5x - 3)$ n'est pas visible.

10 Précision des réponses

*La façon de gérer les erreurs de précision sur l'ensemble d'une épreuve au moyen de la pénalité de précision (**AP**) ne s'applique plus.*

Les instructions concernant ces questions numériques seront fournies aux examinateurs question par question dans le cadre de la correction mathématique, de l'intelligence numérique et de la cohérence contextuelle.

*La rubrique sur la page de garde du sujet de chaque épreuve est donnée pour orienter les candidats. Le barème de notation peut donner des instructions aux examinateurs sous la forme de « acceptez des réponses qui peuvent être arrondies à n chiffres significatifs (cs) ». Lorsque le candidat fournit des réponses, exigées par la question, avec moins de n cs, attribuez **A0**. Des réponses numériques intermédiaires peuvent être requises par le barème de notation mais pas par la question. Dans ce cas accordez seulement le(s) point(s) si le candidat donne la réponse exacte ou avec au moins 2 cs.*

11 Travail barré

Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou si d'une autre façon il a barré son travail, attribuez aucun point pour ce travail.

12 Calculatrice

Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (p.ex. TI-89) ne sont pas autorisées.

Notation de type calculatrice

On peut lire dans le guide des mathématiques NS :

Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations telles qu'elles apparaissent sur leur calculatrice.

N'acceptez pas des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

13 Plusieurs solutions

Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examineur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.

1. (a) estimation sans biais de $\mu = 122$ AI
 estimation sans biais de $\sigma^2 = 4,4406\dots^2 = 19,7$ (MI)AI

Note : Attribuez (MI)A0 pour 4,44.

[3 points]

- (b) l'intervalle de confiance à 99 % pour μ est [118 ; 126] AIAI

[2 points]

- (c) (i) $H_0 : \mu = 125; H_1 : \mu < 125$ AI

- (ii) valeur $p = 0,0220$ A2

- (iii) l'affirmation du client est justifiée parce que $0,0220 < 0,05$ AIRI

[5 points]

Total [10 points]

2. (a) $P(X = 1) = \frac{1}{3}$ AI

$P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ AI

$= \frac{1}{6}$ AG

[2 points]

- (b) $G(t) = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}t^2 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}t^4 + \dots$ MIAI

$= \frac{1}{3}t \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \dots \right) + \frac{1}{6}t^2 \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \dots \right)$ MIAI

$= \frac{\frac{t}{3}}{1 - \frac{t^2}{2}} + \frac{\frac{t^2}{6}}{1 - \frac{t^2}{2}}$ AIAI

$= \frac{2t + t^2}{6 - 3t^2}$ AG

[6 points]

- (c) $G'(t) = \frac{(2 + 2t)(6 - 3t^2) + 6t(2t + t^2)}{(6 - 3t^2)^2}$ MIAI

$E(X) = G'(1) = \frac{10}{3}$ MIAI

[4 points]

Total [12 points]

3. (a) nous savons que $M \sim N(30 ; 9)$ et $F \sim N(20 ; 6,25)$
 soit $X = M - 2F$; $X \sim N(-10 ; 34)$ *MIAIAI*
 nous voulons $P(X > 0)$ *(MI)*
 $= 0,0432$ *AI*
[5 points]
- (b) soit $Y = M_1 + M_2 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$; $Y \sim N(160 ; 49,25)$ *MIAIAI*
 nous voulons $P(Y < 175) = 0,984$ *AI*
[4 points]
- Total [9 points]*
4. (a) $H_0 : \rho = 0$; $H_1 : \rho > 0$ *AI*
[1 point]
- (b) (i) coefficient de corrélation = 0,905 *A2*
 valeur $p = 2,61 \times 10^{-5}$ *A2*
- (ii) une très forte indication d'une correspondance positive entre la note
 en mécanique et la note en statistique *RI*
[5 points]
- (c) la droite de régression de y en fonction de x est $y = 8,71 + 0,789x$ *(MI)AI*
 la note prédite de George pour l'épreuve 2 $= 8,71 + 0,789 \times 63$ *(MI)*
 $= 58$ *AI*
[4 points]
- (d) $t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 2,3019\dots$ *MIAI*
 nombre de degrés de liberté = 14 *(AI)*
 valeur $p = 0,0186\dots$ *AI*
 au niveau de signification de 1 % , ceci n'indique pas une correspondance
 positive entre la note de physique et celle de chimie *RI*
[5 points]
- Total [15 points]*

5. (a) $E(X) = 1 \times \theta + 2 \times 2\theta + 3(1 - 3\theta) = 3 - 4\theta$ **MIAI**
 $\text{Var}(X) = 1 \times \theta + 4 \times 2\theta + 9(1 - 3\theta) - (3 - 4\theta)^2$ **MIAI**
 $= 6\theta - 16\theta^2$ **AG**
[4 points]
- (b) (i) $E(\hat{\theta}_1) = \frac{3 - E(\bar{X})}{4} = \frac{3 - (3 - 4\theta)}{4} = \theta$ **MIAI**
 ainsi, $\hat{\theta}_1$ est un estimateur sans biais de θ **AG**
 $\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{6\theta - 16\theta^2}{16n}$ **AI**
- (ii) chacune des n valeurs observées a une probabilité θ d'avoir la valeur 1 **RI**
 ainsi, $Y \sim B(n; \theta)$ **AG**
 $E(\hat{\theta}_2) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta$ **AI**
 $\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta(1 - \theta)}{n^2} = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}$ **MIAI**
- (iii) $\text{Var}(\hat{\theta}_1) - \text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{6\theta - 16\theta^2 - 16\theta + 16\theta^2}{16n}$ **MI**
 $= \frac{-10\theta}{16n} < 0$ **AI**
 $\hat{\theta}_1$ est un estimateur plus efficace puis qu'il a la plus petite variance **RI**
[10 points]
- Total [14 points]**
-