22147225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

Martes 13 de mayo de 2014 (tarde)

2 horas

Código del examen

2	2	1	4	–	7	2	2	5

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

15 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Los sucesos A y B son tales que $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{11}{20}$ y $\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{11}$.

(a) Halle $\mathrm{P}(A\cap B)$. *[2]*

(b) Halle $\mathrm{P}(A\cup B)$. *[2]*

(c) Indique, dando una razón, si los sucesos A y B son independientes. *[2]*

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

3. *[Puntuación máxima: 5]*

(a) Muestre que el siguiente sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. *[2]*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -2 \\ 3x - y + 14z &= 6 \\ x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio.

(b) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los tres planos. *[3]*

4. *[Puntuación máxima: 6]*

Las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 1 = 0$ son α y β.

Sin resolver la ecuación,

(a) halle el valor de $\alpha^2 + \beta^2$; *[4]*

(b) halle una ecuación cuadrática cuyas raíces sean α^2 y β^2. *[2]*

5. *[Puntuación máxima: 5]*

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \left|\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right|$ para $0 \le x \le 8\pi$. *[2]*

(b) Resuelva $\left|\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$ para $0 \le x \le 8\pi$. *[3]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 6]*

PQRS es un rombo. Sabiendo que $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a}$ y $\overrightarrow{QR} = \boldsymbol{b}$,

(a) exprese los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QS}$ en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; *[2]*

(b) a partir de lo anterior, muestre que las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto. *[4]*

7. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere los números complejos $u = 2 + 3\mathrm{i}$ y $v = 3 + 2\mathrm{i}$.

(a) Sabiendo que $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{10}{w}$, exprese w de la forma $a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. *[4]*

(b) Halle w^* y expréselo de la forma $re^{\mathrm{i}\theta}$. *[3]*

8. *[Puntuación máxima: 6]*

La función f viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \le 2 \\ \frac{3}{4}(x-2)^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine si f es o no continua. *[2]*

El gráfico de la función g se obtiene aplicando las siguientes transformaciones al gráfico de f:

una simetría respecto al eje y seguida de una traslación por medio del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Halle $g(x)$. *[4]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. *[Puntuación máxima: 7]*

Los tres primeros términos de una progresión geométrica son $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2x$ y $4 \operatorname{sen} x \cos^2 x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Halle la razón común r. *[1]*

(b) Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie geométrica $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + 4 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \ldots$ es convergente. *[3]*

Considere $x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, $x > 0$.

(c) Muestre que la suma de los infinitos términos de esta serie es igual a $\frac{\sqrt{15}}{2}$. *[3]*

10. *[Puntuación máxima: 7]*

Utilice la sustitución $x = a\sec\theta$ para mostrar que $\int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{24a^3}\left(3\sqrt{3}+\pi-6\right)$.

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Hay dos máquinas que fabrican baterías para teléfonos móviles. Con la máquina A se fabrica el 60% de la producción diaria, y con la máquina B se fabrica el 40%. Al analizar el proceso se observa que, en promedio, el 2% de las baterías que se fabrican con la máquina A son defectuosas, y el 1% de las baterías que se fabrican con la máquina B son defectuosas.

(i) Dibuje un diagrama de árbol que muestre claramente las probabilidades respectivas.

(ii) Se elige una batería al azar. Halle la probabilidad de que sea defectuosa.

(iii) Se elige una batería al azar y se observa que es defectuosa. Halle la probabilidad de que se haya fabricado con la máquina A. *[6]*

(b) En un paquete de siete transistores, hay tres que son defectuosos. Se eligen al azar tres transistores del paquete, sin reposición. La variable aleatoria discreta X representa el número de transistores defectuosos que se han elegido.

(i) Halle $\mathrm{P}(X = 2)$.

(ii) **Copie** y complete la siguiente tabla.

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x)$				

(iii) Determine $\mathrm{E}(X)$. *[6]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 18]*

Dados los puntos $\mathrm{A}(1, 0, 4)$, $\mathrm{B}(2, 3, -1)$ y $\mathrm{C}(0, 1, -2)$,

(a) halle la ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por los puntos A y B. *[2]*

La recta L_2 tiene por ecuación cartesiana $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

(b) Muestre que L_1 y L_2 son rectas alabeadas. *[5]*

Considere el plano Π_1, paralelo a L_1 y también a L_2. El punto C pertenece al plano Π_1.

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1. *[4]*

La recta L_3 tiene por ecuación vectorial $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

El plano Π_2 tiene por ecuación cartesiana $x + y = 12$.

El ángulo entre la recta L_3 y el plano Π_2 es igual a 60°.

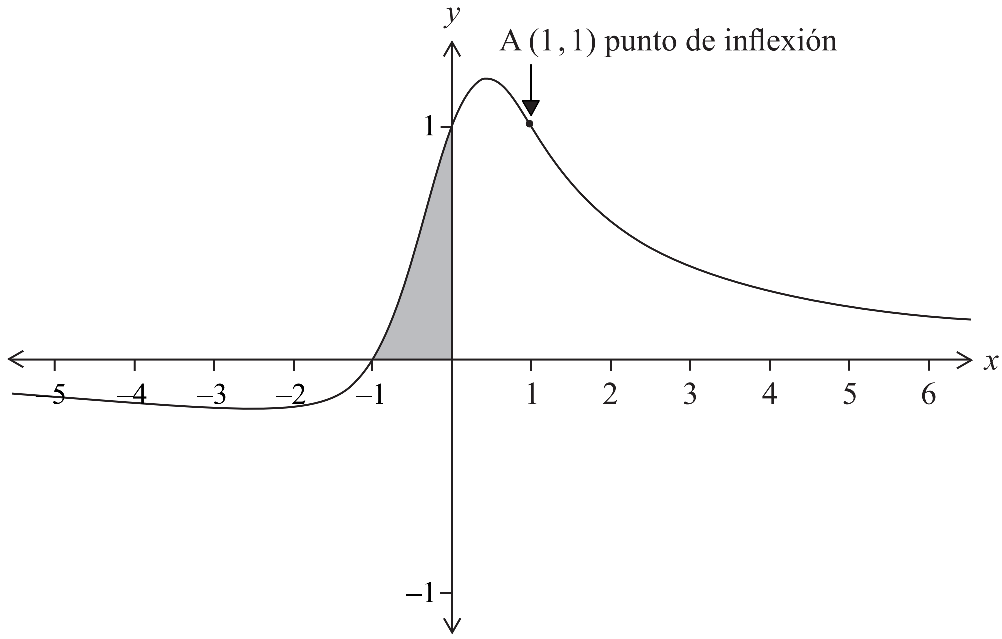
(d) (i) Halle el valor de k.

(ii) Halle el punto de intersección P de la recta L_3 y el plano Π_2. *[7]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 16]*

A continuación se muestra el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.



(a) Halle $f'(x)$. *[2]*

(b) A partir de lo anterior, halle las coordenadas x de los puntos en los que la pendiente del gráfico de f es igual a cero. *[1]*

(c) Halle $f''(x)$, expresando la respuesta de la forma $\dfrac{p(x)}{(x^2+1)^3}$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado 3. *[3]*

El punto $(1, 1)$ es un punto de inflexión. Hay otros dos puntos de inflexión.

(d) Halle las coordenadas x de los otros dos puntos de inflexión. *[4]*

(e) Halle el área de la región sombreada. Exprese la respuesta de la forma $\dfrac{\pi}{a} - \ln\sqrt{b}$, donde a y b son enteros. *[6]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

14. *[Puntuación máxima: 14]*

Considere las siguientes funciones:

$$h(x) = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = h(x)$. *[2]*

(b) Halle una expresión para la función compuesta $h \circ g(x)$ e indique su dominio. *[2]*

Sabiendo que $f(x) = h(x) + h \circ g(x)$,

(c) (i) halle $f'(x)$, expresando el resultado de forma simplificada;

(ii) muestre que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ para $x > 0$. *[7]*

Nigel indica que f es una función impar, mientras que Tom sostiene que f es una función par.

(d) (i) Indique quién tiene razón y justifique su respuesta.

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de $f(x)$ para $x < 0$. *[3]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.