

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – statistiques et probabilités

Mardi 10 novembre 2020 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 8]

Peter, Dan et Eva décident d'observer la couleur de chaque voiture qui arrive dans leur établissement scolaire. On suppose que les couleurs des voitures sont indépendantes les unes des autres.

La probabilité qu'une voiture qui arrive dans leur établissement scolaire soit rouge est de $\frac{1}{12}$.

- (a) Peter observe 20 voitures. Trouvez la probabilité qu'au moins trois de ces voitures soient rouges. [2]
- (b) Dan observe des voitures jusqu'à ce qu'une voiture rouge arrive. Trouvez la probabilité qu'il observe au moins six voitures. [2]
- (c) Eva observe des voitures jusqu'à ce que trois voitures rouges arrivent.
- (i) Trouvez la probabilité qu'Eva observe exactement 20 voitures.
- (ii) Trouvez le nombre espéré de voitures observées par Eva. [4]

2. [Note maximale : 8]

La fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète X est donnée par $G_X(t) = \frac{2+t}{3}$.

- (a) Écrivez la valeur de $P(X=1)$. [1]

La fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète Y est donnée par

$$G_Y(t) = \frac{kt+1}{k^2-t^2}, \text{ où } k > 0.$$

- (b) Montrez que $k = 2$. [3]
- (c) Étant donné que X et Y sont indépendantes, trouvez
- (i) $G_{X+Y}(t)$, la fonction génératrice pour $X+Y$;
- (ii) $E(X+Y)$. [4]

3. [Note maximale : 15]

Un commerce vend des carottes et des brocolis. Les poids des carottes peuvent être modélisés par une distribution normale de variance 25 grammes² et les poids des brocolis peuvent être modélisés par une distribution normale de variance 80 grammes². Le commerçant prétend que le poids moyen des carottes est de 130 grammes et le poids moyen des brocolis est de 400 grammes.

- (a) En supposant que l'affirmation du commerçant est correcte, trouvez la probabilité que le poids de six carottes choisies au hasard soit supérieur à deux fois le poids d'un brocoli choisi au hasard. [6]

Dong Wook décide d'examiner l'affirmation du commerçant, à savoir que le poids moyen des carottes est de 130 grammes. Il planifie de sélectionner un échantillon aléatoire de n carottes afin de calculer un intervalle de confiance à 98% pour le poids moyen de la population.

- (b) Trouvez la plus petite valeur de n requise pour s'assurer que l'amplitude de l'intervalle de confiance est inférieure à 2 grammes. [3]

Anjali pense que le poids moyen, μ grammes, des brocolis est inférieur à 400 grammes. Elle décide d'effectuer un test d'hypothèse, en utilisant un échantillon aléatoire de taille 8. Ses hypothèses sont

$$H_0 : \mu = 400 ; H_1 : \mu < 400.$$

Elle décide de rejeter H_0 si la moyenne de son échantillon est inférieure à 395 grammes.

- (c) Trouvez le niveau de signification de ce test. [3]
- (d) Sachant qu'en fait, les poids des brocolis suivent une distribution normale de moyenne 392 grammes et de variance 80 grammes², trouvez la probabilité qu'Anjali commette une erreur de type II. [3]

4. [Note maximale : 19]

La distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est donnée par

x	0	1	2
$P(X=x)$	p	$3p$	$1-4p$

où $0 < p < \frac{1}{4}$.

(a) Trouvez une expression pour $E(X)$, en fonction de p . [2]

(b) Montrez que $\text{Var}(X) = p(7 - 25p)$. [3]

Christine et Sarah veulent estimer la valeur de p . Elles sélectionnent un échantillon aléatoire de n observations de X .

(c) Christine calcule la moyenne de l'échantillon, \bar{X} , et propose $C = \frac{2 - \bar{X}}{5}$ en tant qu'estimateur pour p .

(i) Montrez que C est un estimateur sans biais pour p .

(ii) Trouvez $\text{Var}(C)$. [5]

(d) Sarah compte le nombre de zéros, Y , dans l'échantillon de taille n . Elle propose $S = \frac{Y}{n}$ en tant qu'estimateur pour p .

(i) Écrivez la distribution pour Y .

(ii) Montrez que S est un estimateur sans biais pour p .

(iii) Montrez que $\text{Var}(S) = \frac{p(1-p)}{n}$. [5]

(e) (i) Esquissez une représentation graphique du rapport $\frac{\text{Var}(C)}{\text{Var}(S)}$ pour $0 < p < \frac{1}{4}$, en indiquant clairement l'échelle sur l'axe des ordonnées Oy .

(ii) À partir de là, déterminez, en donnant une raison, quel est le meilleur estimateur, C ou S . [4]