

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Miércoles 5 de noviembre de 2003 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio fx-9750G, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.

1. [Puntuación máxima: 10]

La siguiente tabla muestra las alturas correspondientes a 200 estudiantes.

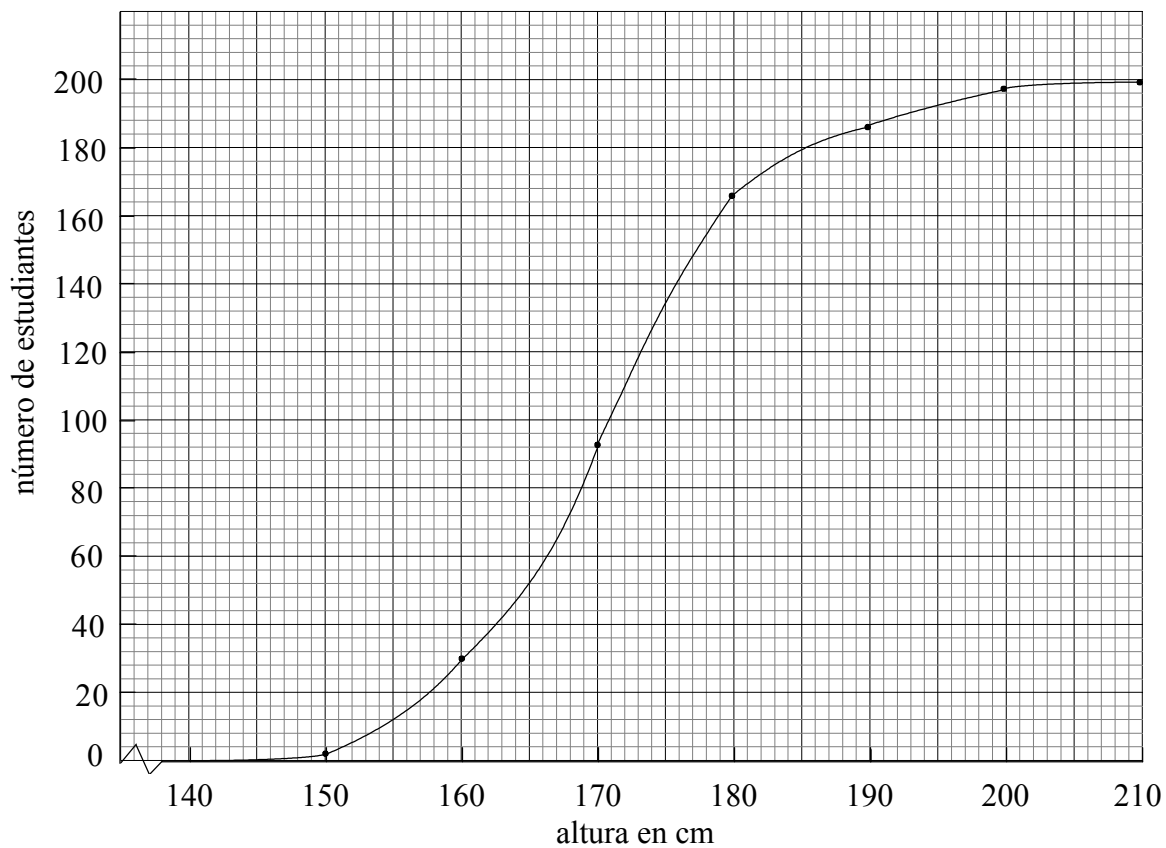
Altura (h) en cm	Frecuencia
$140 \leq h < 150$	2
$150 \leq h < 160$	28
$160 \leq h < 170$	63
$170 \leq h < 180$	74
$180 \leq h < 190$	20
$190 \leq h < 200$	11
$200 \leq h < 210$	2

- (a) Escriba la clase modal. [1 punto]
- (b) Calcule una estimación de la media y de la desviación típica de las alturas. [4 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

La siguiente gráfica muestra la curva de frecuencias acumuladas correspondiente a los datos anteriores.



- (c) Escriba la mediana de las alturas. [1 punto]
- (d) El tercer cuartil es 177,3 cm. Calcule el rango intercuartil. [2 puntos]
- (e) Halle el porcentaje de estudiantes con alturas inferiores a 165 cm. [2 puntos]

2. [Puntuación máxima: 13]

Un día determinado se pide a 100 niños que anoten lo que han bebido ese día.

Se les ofrece tres posibilidades: agua (W), café (C) o zumo de frutas (F).

1 niño bebió sólo agua.

6 niños bebieron sólo café.

8 niños bebieron sólo zumo de frutas.

5 niños bebieron las tres cosas.

7 niños bebieron sólo agua y café.

53 niños bebieron sólo café y zumo de frutas.

18 niños bebieron sólo agua y zumo de frutas.

- (a) Represente la información anterior en un diagrama de Venn. *[4 puntos]*
- (b) ¿Cuántos niños no bebieron ninguna de las tres cosas? *[2 puntos]*
- (c) Se elige un niño al azar. Halle la probabilidad de que:
- (i) haya bebido café;
 - (ii) haya bebido agua o zumo de frutas, pero no café;
 - (iii) no haya bebido zumo de frutas, sabiendo que bebió agua. *[4 puntos]*
- (d) Se eligen dos niños al azar. Halle la probabilidad de que ambos hayan bebido las tres cosas. *[3 puntos]*

4. [Puntuación máxima: 18]

La policía de Villarrápida está pensando en cambiar el sistema de imposición de multas por exceso de velocidad. Hasta el momento, en una zona con límite de velocidad de 100 km/h, las multas por exceso de velocidad se calculan según la siguiente tabla:

Número de km/h (s) por encima del límite	Multa (en dólares)
$0 < s \leq 10$	50
$10 < s \leq 20$	100
$20 < s \leq 30$	150
$30 < s \leq 50$	250
$50 < s \leq 70$	500

- (a) Dibuje, en papel milimetrado, una gráfica que represente esta información. Utilice una escala de 2 cm para representar 10 km/h sobre el eje x , con $0 \leq x \leq 70$, y 2 cm para representar 100 dólares sobre el eje y , con $0 \leq y \leq 700$.

[5 puntos]

El nuevo sistema propuesto consiste en lo siguiente:

Para un exceso de velocidad de 5 km/h por encima del límite, no hay sanción. Para los demás casos las multas se calculan utilizando una función lineal, cuya gráfica es la recta que se obtiene uniendo los puntos (5, 0) y (70, 650).

- (b) (i) Dibuje esta recta en la gráfica anterior.
 (ii) Halle la ecuación de esta recta.
- (c) Para ciertas velocidades, las multas son las mismas que con el sistema antiguo.
 (i) ¿Cuántas veces coinciden?
 (ii) Calcule una de las velocidades para las que la multa es la misma con los dos sistemas.

[4 puntos]

[3 puntos]

En un intervalo de pocos minutos, 5 coches exceden el límite de velocidad.
 2 viajaban a 104 km/h,
 3 viajaban a 125 km/h.

- (d) Calcule la cantidad de dinero que recaudaría la policía utilizando cada uno de los sistemas.

[6 puntos]

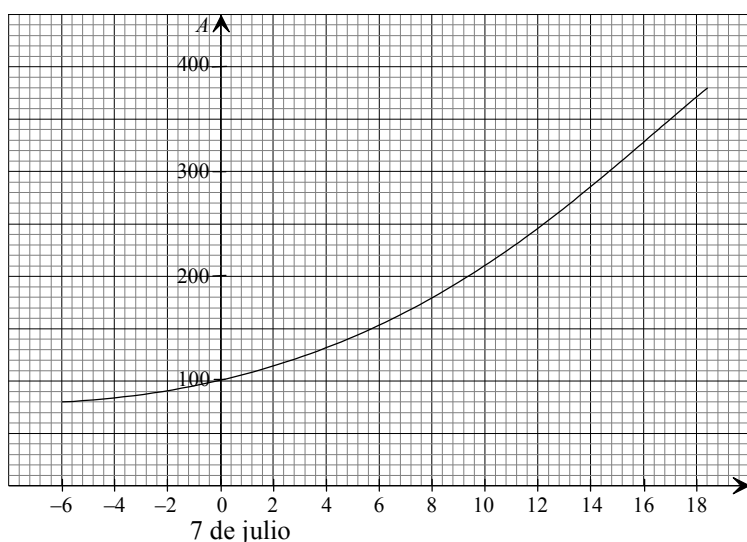
5. [Puntuación máxima: 12]

- (i) El área, $A \text{ m}^2$, ocupada por una planta de crecimiento rápido se mide a mediodía (12.00), todos los días. El 7 de julio el área era de 100 m^2 . La planta crece un 7,5 % cada día. El área A viene dada por la fórmula

$$A = 100(1,075)^t$$

donde t representa el número de días a partir del 7 de julio (para el 7 de julio, $t = 0$).

A continuación se muestra la gráfica de $A = 100(1,075)^t$.



- (a) ¿Qué representa la gráfica cuando t es negativo? [2 puntos]
- (b) Utilizando la gráfica, halle el valor de t cuando $A = 178$. [1 punto]
- (c) Calcule el área cubierta por la planta el 28 de julio a mediodía. [3 puntos]

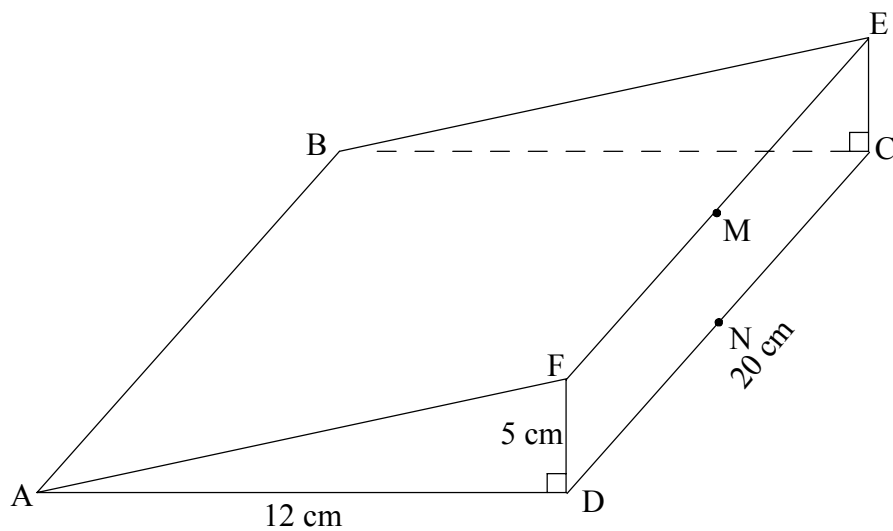
(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

- (ii) En la figura dada a continuación, ABEF, ABCD y CDFE son todos rectángulos.

$AD = 12\text{ cm}$, $DC = 20\text{ cm}$ y $DF = 5\text{ cm}$.

M es el punto medio de EF y N es el punto medio de CD.



- (a) Calcule (i) la longitud de AF;

- (ii) la longitud de AM.

[3 puntos]

- (b) Calcule el ángulo entre AM y la cara ABCD.

[3 puntos]

SECCIÓN B

Conteste **una** pregunta de esta sección.

Matrices y teoría de grafos

6. [Puntuación máxima: 30]

- (i) En una ciudad hay 3 restaurantes pizzerías. Los precios de las pizzas son distintos en cada uno.

En *La Reina de las Pizzas*, una pizza de salami cuesta \$ 6, una de jamón y queso \$ 5, una de tomate \$ 4,50 y una de especias \$ 7.

En *Pizza Rápida*, una pizza de salami cuesta \$ 6, la de jamón y queso \$ 7, la de tomate \$ 5 y la de especias \$ 5.

En *La Casa de las Pizzas*, la pizza de salami cuesta \$ 5, la de jamón y queso \$ 6, la de tomate \$ 6 y la de especias \$ 6.

- (a) Escriba estos datos en una matriz 3 por 4, **C**. [3 puntos]

Los alumnos de primer curso encargan 8 pizzas de salami, 4 de jamón y queso, 6 de tomate y 12 de especias. Los alumnos de segundo curso encargan 6 pizzas de salami, 12 de jamón y queso, 8 de tomate y 4 de especias.

- (b) Escriba estos datos en una matriz 4 por 2, **P**. [2 puntos]

- (c) Utilizando las matrices **C** y **P**, calcule

- (i) el costo total de comer en *Pizza Rápida* para los alumnos de primer curso.

- (ii) el costo total de comer en *La Casa de las Pizzas* para los alumnos de segundo curso.

- (iii) qué pizzería resulta más barata para los alumnos de primer curso. [7 puntos]

- (ii) A continuación se muestra la matriz de adyacencia, **M**, de las carreteras que conectan las ciudades Q, R, S y T.

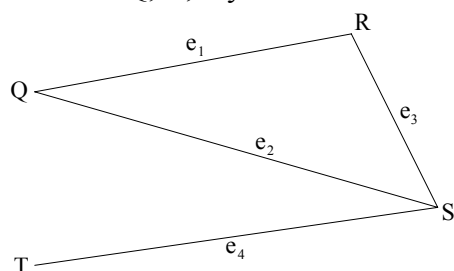
$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} Q & R & S & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} Q \\ R \\ S \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- (a) Dibuje un dígrafo que represente esta información. [4 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6 (ii): continuación)

El siguiente subgrafo muestra cuatro de las carreteras que conectan las ciudades Q, R, S y T.



- (b) Represente esta información en una matriz de incidencia. [4 puntos]
- (c) El subgrafo anterior, ¿es conexo? Justifique su respuesta. [2 puntos]

(iii) Dos niños A y B juegan a un juego de suma nula de dos personas. A tiene dos estrategias a_1 y a_2 , y B tiene dos estrategias b_1 y b_2 . La siguiente matriz (matriz de pagos) muestra las ganancias o pérdidas de A .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} B \\ b_1 \quad b_2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} A \\ a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

- (a) ¿Cuál es el resultado si A juega a_1 y B juega b_1 ? [2 puntos]
- (b) Sea P la probabilidad de que B juegue b_1 . La probabilidad de que B juegue b_2 será por lo tanto $1 - P$. Esta información viene representada por las matrices siguientes.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \begin{pmatrix} P \\ 1-P \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Si A juega a_1 , entonces la ganancia esperada por A es $4P - 1$.

- (i) Si A juega a_2 , calcule, en función de P , la ganancia esperada por A .

La ganancia esperada por A es la misma tanto si juega a_1 como si juega a_2 . Calcule

- (ii) el valor de P .
- (iii) el valor de la ganancia esperada por A . [6 puntos]

Extensión de estadística y probabilidad

7. [Puntuación máxima: 30]

(i) Los pesos de unas bolsas de galletas tienen una distribución normal con una media de 123 g y una desviación típica de 2,5 g.

(a) Compruebe que la probabilidad de que una bolsa pese más de 122 g es 0,6554. [2 puntos]

(b) Calcule la probabilidad de que una bolsa pese menos de 120 g. [3 puntos]

El fabricante pretende que sólo el 7,5 % de las bolsas pesen más de 126 g.

(c) Si la desviación típica se mantiene en 2,5 g, calcule el valor que debería tener la media para conseguir este propósito. [5 puntos]

(ii) Se abre una bolsa que contiene 60 caramelos. Los caramelos son de los siguientes colores:

Color	Frecuencia
Rojo	18
Naranja	17
Verde	10
Morado	9
Azul	6

Según el fabricante, los colores deberían hallarse en los siguientes porcentajes:

Color	Porcentaje
Rojo	35 %
Naranja	25 %
Verde	20 %
Morado	15 %
Azul	5 %

(a) Calcule el número de caramelos de cada color que se puede esperar encontrar en una bolsa que contiene exactamente 60 caramelos. [3 puntos]

Antes de aplicar la prueba de chi cuadrado a estos datos, es necesario combinar los datos relativos a uno de los colores con los de otro color.

(b) ¿Cuál es este color y por qué es necesario lo anterior? [2 puntos]

(c) Usando la prueba de chi cuadrado al nivel de significación del 5 %, contraste la hipótesis de que los caramelos del paquete puedan ser considerados una muestra al azar. Recuerde establecer la hipótesis nula, el número de grados de libertad y el valor crítico de chi cuadrado. [7 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

- (iii) Se han comprado diversas golosinas en barras, y los pesos y costos de cada barra aparecen en la siguiente tabla.

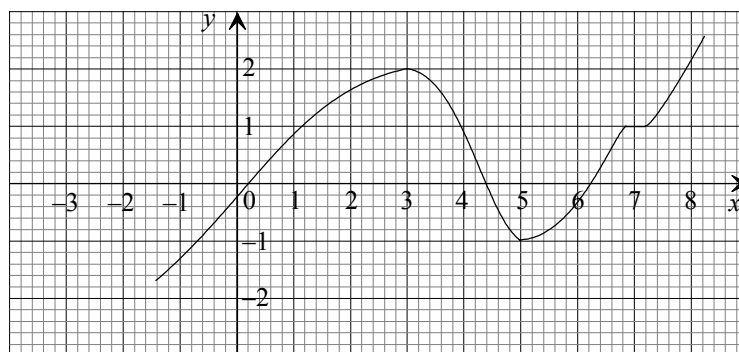
	Yummy	Chox	Marz	Twin	Chunx	Lite	BigC	Bite
Peso (g)	60	85	80	65	95	50	100	45
Costo (Euros)	1,10	1,50	1,40	1,20	1,80	1,00	1,70	0,90

- (a) Sabiendo que $s_x = 19,2$; $s_y = 0,307$ y $s_{xy} = 5,81$; halle el coeficiente de correlación, r , aproximando la respuesta a 3 cifras decimales. *[2 puntos]*
- (b) Describa la correlación entre el peso de una barra de golosina y su costo. *[1 punto]*
- (c) Calcule la ecuación de la recta de regresión de y sobre x . *[3 puntos]*
- (d) Utilice esta ecuación para estimar el costo de una barra de golosina que pesa 109 g. *[2 puntos]*

Introducción al cálculo diferencial

8. [Puntuación máxima: 30]

(i) La siguiente gráfica muestra parte de la curva $y = f(x)$.



(a) ¿Para qué valores de x es $f'(x) = 0$? [3 puntos]

(b) ¿Para qué rango de valores de x es $f'(x) < 0$? [2 puntos]

(ii) Dada la función $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 18$.

(a) Halle $g'(x)$. [3 puntos]

(b) Resuelva $g'(x) = 0$. [2 puntos]

(c) (i) Calcule los valores de $g'(x)$ cuando

(a) $x = -3$;

(b) $x = 0$.

(ii) A partir de los resultados anteriores, determine si la función es creciente o decreciente en

(a) $x = -3$;

(b) $x = 0$. [4 puntos]

(d) El valor de x hallado en el apartado (b), ¿es un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión? Justifique su respuesta. [2 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

- (iii) La velocidad ($v \text{ cms}^{-1}$) de un objeto en movimiento en el instante t viene dada por la expresión

$$v = 3t^2 - 16t + 16$$

- (a) Suponiendo que el objeto parte de cero, halle la expresión del desplazamiento, s , en función de t . [5 puntos]
- (b) Calcule el desplazamiento cuando $t = 4$. Interprete el resultado. [3 puntos]
- (c) Compruebe que, si la velocidad es cero, los valores de t son 4 y $\frac{4}{3}$. [1 punto]
- (d) Calcule la aceleración del objeto en esos instantes. [4 puntos]
- (e) ¿En qué instante la aceleración es igual a cero? [1 punto]
-