IBO IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Miércoles 13 de noviembre de 2002 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberén ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

*Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente **ningún** punto.*

1. *[Puntuación máxima: 22]*

(i) Las notas de una clase aparecen en la tabla siguiente.

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	0	5	7	7	2	4	3	2

(a) Calcule la media y la desviación típica de las notas. *[2 puntos]*

(b) Compruebe, al nivel de significación del 5%, si una distribución de Poisson es un modelo adecuado de los datos. *[9 puntos]*

(ii) Se registran las estaturas en cm de los jugadores de dos equipos de baloncesto, A y B.

Las estaturas del equipo A son 203, 214, 187, 188, 196, 199, 205, 203, 199 y 208.

Para el equipo B, la suma de las estaturas es 2 388, y la suma de los cuadrados de las estaturas es 475 770. La estatura media es de 199 cm,

es decir, $\sum h = 2388$, $\sum h^2 = 475\,770$, $\overline{h} = 199$.

(a) Calcule

(i) la desviación típica de las estaturas del equipo A

(ii) la desviación típica de las estaturas del equipo B

(iii) la altura media de todos los jugadores, aproximando al milímetro. *[5 puntos]*

(b) (i) Calcule la estimación con dos muestras conjuntas de la varianza de la población para la muestra combinada.

(ii) Partiendo de aquí, compruebe al nivel de significación del 5% si estos dos equipos provienen de la misma población. *[6 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 20]*

(i) La relación $\circ$ sobre el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define por $a \circ b \Leftrightarrow 3^a \equiv 3^b \pmod{10}$.

(a) Muestre que $\circ$ es una relación de equivalencia. *[7 puntos]*

(b) Halle las clases de equivalencia de $\circ$. *[3 puntos]*

(c) ¿Cuál es el último dígito de la cifra 3^{2002}? *[2 puntos]*

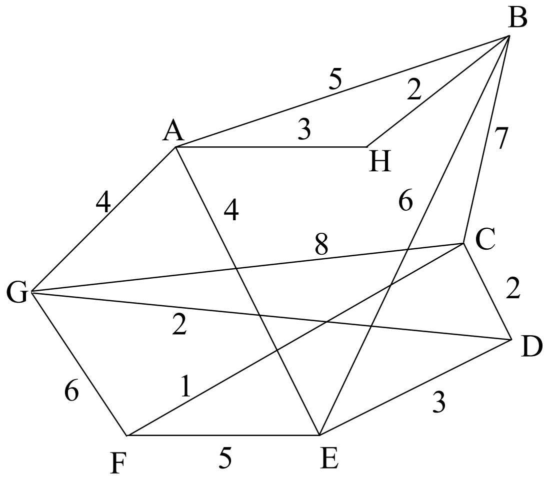
(ii) Sea min $\{a, b\}$ el valor mínimo de dos números, a y b. La operación $\otimes$ se define sobre el conjunto de los enteros negativos como $a \otimes b = \min\{a, b\}$.

(a) Muestre que $\otimes$ es conmutativa. *[1 punto]*

(b) Determine cuáles axiomas de grupo cumple. *[7 puntos]*

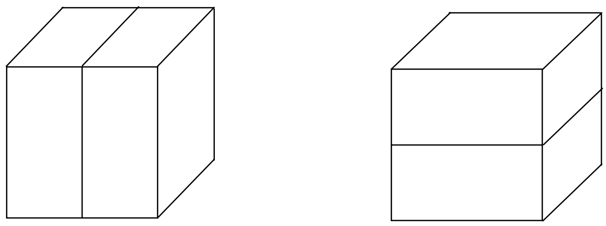
3. *[Puntuación máxima: 20]*

(i) En la siguiente figura aparece un grafo ponderado.



Utilice un algoritmo adecuado para hallar el árbol de extensión mínimo del grafo, y escriba el ponderado de este árbol. *[6 puntos]*

(ii) Una caja tiene dimensiones $2\times1\times n$, donde n es un entero positivo. Se debe llenar con ladrillos idénticos, de dimensiones $2\times1\times1$.
Cuando $n=1$ hay una sola manera de llenar la caja.
Cuando $n=2$ hay dos maneras de llenar la caja, como se muestra en la siguiente figura.



(a) Trace diagramas similares para mostrar el número de maneras en que se puede llenar la caja cuando $n=3$. *[3 puntos]*

(b) Sea a_n el número de maneras de llenar la caja de dimensiones $2\times1\times n$.

(i) Explique por qué $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

(ii) Resuelva la ecuación en diferencias.

(iii) Halle el número de maneras de llenar la caja cuando $n=15$. *[11 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 18]*

En esta pregunta, exprese sus respuestas con la exactitud que muestra su calculadora.

Sea la función $f(x) = \log_{10} x - \dfrac{1}{x}$.

(a) Halle el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje de las x y las dos rectas verticales, $x = 1$ y $x = 2$. *[2 puntos]*

(b) Aplique la regla de Simpson, con cuatro bandas, para estimar el área de la parte (a). Halle el error porcentual de la estimación, dando la respuesta con **tres** cifras significativas. *[6 puntos]*

(c) Resuelva la ecuación $f(x) = 0$. *[2 puntos]*

(d) Dado que $x = \dfrac{1}{\log_{10} x}$ es una iteración con un punto fijo posible, determine si la iteración converge o diverge con el valor inicial $x_0 = 2{,}5$. Razone su respuesta. *[4 puntos]*

(e) Use el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación $f(x) = 0$. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 20]*

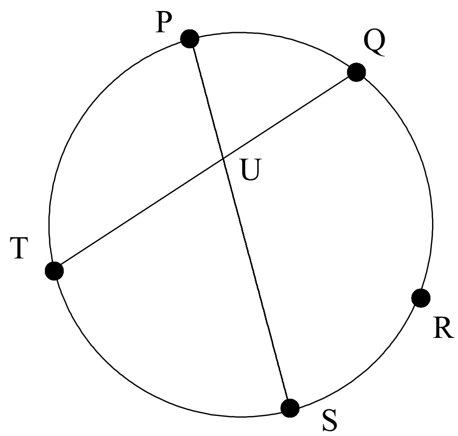
(i) Una familia de curvas está dada por la ecuación

$$(\lambda^2 - 9)x^2 + \lambda^2 y^2 = (\lambda^2 - 9)\lambda^2 \, , \, \lambda \in \mathbb{R} \, .$$

(a) Clasifique las curvas con respecto a λ (es decir, identifique las curvas para distintos valores de λ). *[5 puntos]*

(b) Muestre que las curvas tienen los mismos focos si $\lambda \neq 0, \pm 3$. *[4 puntos]*

(ii) En una circunferencia se dan los puntos P, Q, R, S y T como se muestra a continuación.



El arco PQ es igual al arco RS. El punto U es la intersección de los segmentos de recta [PS] y [QT].

(a) Muestre que los triángulos PTU y RTS son semejantes. *[2 puntos]*

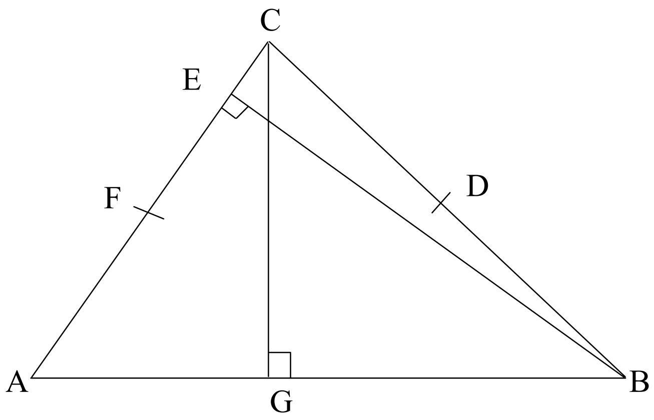
(b) Muestre que los triángulos SUT y RPT son semejantes. *[2 puntos]*

(c) A partir de allí, demuestre el teorema de Ptolomeo para el cuadrilátero cíclico PRST. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

(iii) A continuación se muestra el triángulo ABC.



D es el punto medio del lado [BC];
F es el punto medio del lado [CA];
E es el pie de la perpendicular trazada desde el vértice B a [AC];
G es el pie de la perpendicular trazada desde el vértice C a [AB].

Muestre que $\mathrm{ED} \times \mathrm{FG} + \mathrm{EF} \times \mathrm{GD} = \mathrm{DF} \times \mathrm{EG}$. *[3 puntos]*