AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Martes 12 de noviembre de 2002 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las diez preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente ***ningún*** *punto.*

1. Sea el grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

(a) Halle el orden de los elementos 4, 5 y 9.

(b) Muestre que este grupo es cíclico. Halle todos los generadores posibles.

2. Sea κ_n un grafo completo de n vértices.

(a) Trace κ_5 y halle un circuito euleriano en el mismo.

(b) Halle el valor de n tal que κ_n contenga un sendero euleriano pero no un circuito euleriano. Justifique su respuesta.

3. Determine si la siguiente serie converge o diverge.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\frac{7}{4}+\frac{9}{4\sqrt{2}}+\dots .$$

4. Halle todos los enteros x que cumplen la ecuación $2x^3-3x+1\equiv 4 \pmod 6$.

5. Se empacan huevos en cajas de cuatro. En uno de los días se eligieron 200 cajas y se registró el número de huevos rotos en cada caja.

Número de huevos rotos	0	1	2	3	4
Número de cajas	73	80	31	14	2

Compruebe, al nivel de significación del $5\,\%$, si estos datos tienen distribución binomial con $n=4$ y $p=0{,}24$.

6. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como $f(x) = 3^{\cos x} + \frac{1}{6}$.

(a) Determine si la función es inyectiva o suryectiva, e indique sus razones.

(b) Si se restringe el dominio de *f* a $[0, \pi]$, halle su función inversa.

7. Sea el triángulo ABC. Los puntos M, N y P están, respectivamente, sobre los lados [BC], [CA] y [AB], de modo tal que las rectas (AM), (BN) y (CP) son concurrentes.

Dado que $\frac{\text{AP}}{\text{AB}} = \lambda$, y que $\frac{\text{CM}}{\text{CB}} = \mu$, con $\lambda, \mu, \in \mathbb{R}^+$, halle $\frac{\text{NA}}{\text{CN}}$.

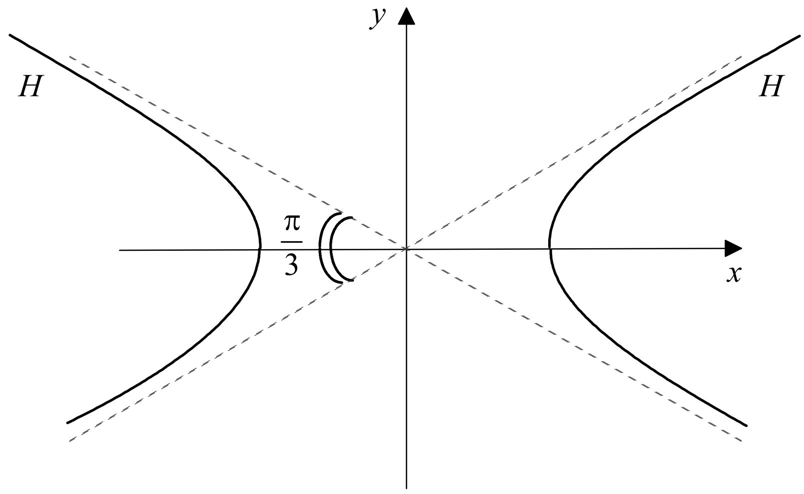
8. Halle un polinomio de Taylor de tercer grado para la función $f(x) = \tan x$, en el entorno de $x = \frac{\pi}{4}$.

9. Un periódico escolar contiene tres secciones. El número de errores de imprenta en cada sección tiene distribución de Poisson, con parámetros 0,9 , 1,1 y 1,5 respectivamente. Los errores de imprenta se producen en forma independiente.

(a) Halle la probabilidad de que el periódico no contenga errores de imprenta.

(b) La probabilidad de que haya más de *n* errores de imprenta en el periódico es inferior a 0,5 . Halle el menor valor de *n*.

10. Sea la hipérbola H con ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. El ángulo entre las asíntotas de H es $\frac{\pi}{3}$, como se muestra en la figura a continuación.



(a) Calcule la excentricidad de H.

(b) Halle las ecuaciones de las directrices de H, dando sus respuestas en función de a.