Bachillerato Internacional

Portada de la Monografía

Los alumnos deben llenar esta hoja y entregarla al supervisor junto con la versión final de su monografía.

Número de convocatoria del alumno	
Nombre y apellido(s) del alumno	
Número del colegio	
Nombre del colegio	
Convocatoria de exámenes (mayo o noviembre)	MAYO
Año	2012

Asignatura del Programa del Diploma en la que se ha inscrito la monografía: MATEMÁTICAS

(En el caso de una monografía en lenguas, señale si se trata del Grupo 1 o el Grupo 2.)

Título de la monografía: EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO Y SU RESOLUCIÓN A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Declaración del alumno

El alumno debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no reciba una calificación final.

Confirmo que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda que la permitida por el Bachillerato Internacional.

He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otra persona, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual.

Sé que el máximo de palabras permitido para las monografías es 4.000, y que a los examinadores no se les pide que lean monografías que superen ese límite.

Esta es la versión final de mi monografía.

Firma del alumno: ______________ Fecha: 20-02-2012

Bachillerato Internacional, Peterson House
Malthouse Avenue, Cardiff Gate, Cardiff, CF23 8GL REINO UNIDO

Informe y declaración del supervisor

El supervisor debe completar este informe, firmar la declaración y luego entregar esta portada junto con la versión final de la monografía al coordinador del Programa del Diploma.

Nombre y apellido(s) del supervisor [MAYÚSCULAS]:

Si lo considera adecuado, escriba algunos comentarios sobre el contexto en que el alumno desarrolló la investigación, las dificultades que encontró y cómo las ha superado (ver página 13 de la guía para la monografía). La entrevista final con el alumno puede ofrecer información útil. Estos comentarios pueden ayudar al examinador a conceder un nivel de logro para el criterio K (valoración global). No escriba comentarios sobre circunstancias adversas personales que puedan haber afectado al alumno. En el caso en que el número de horas dedicadas a la discusión de la monografía con el alumno sea cero, debe explicarse este hecho indicando cómo se ha podido garantizar la autoría original del alumno. Puede adjuntar una hoja adicional si necesita más espacio para escribir sus comentarios.

ha trabajado con ahínco en su meta de hacer un trabajo de investigación propio para encontrar la figura con un perímetro dado y mayor área posible relacionándolo posteriormente con la resolución de este problema a lo largo de la historia.
Ha sido perseverante en su objetivo y creo que ha realizado una reflexión profunda de acuerdo con su nivel académico del problema. Ha iniciado el proyecto con casos particulares y ha ido avanzando utilizando diferentes lenguajes matemáticos.
Hizo una buena defensa oral del trabajo
La bibliografía que ha consultado es adecuada para afrontar los objetivos de su investigación.

Hemos mantenido entrevistas regulares y ha comprendido y seguido las observaciones que les hacia al respecto sin abandonar su propia iniciativa intelectual.

El supervisor debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no se otorgue una calificación final.

He leído la versión final de la monografía, la cual será entregada al examinador.

A mi leal saber y entender, la monografía es el trabajo auténtico del alumno.

He dedicado ______ horas a discutir con el alumno su progreso en la realización de la monografía.

Firma del supervisor: ______________________ Fecha: 22-02-2012

Formulario de evaluación (para uso exclusivo del examinador)

Número de convocatoria del alumno [redacted]

Criterios de evaluación	Examinador 1	Máximo	Examinador 2	Máximo	Examinador 3
	Nivel de logro				
A Formulación del problema de investigación	1	2	2	2	
B Introducción	1	2	2	2	
C Investigación	1	4	3	4	
D Conocimiento y comprensión del tema	2	4	3	4	
E Argumento razonado	2	4	3	4	
F Aplicación de habilidades de análisis y evaluación apropiadas para la asignatura	2	4	3	4	
G Uso de un lenguaje apropiado para la asignatura	3	4	3	4	
H Conclusión	1	2	2	2	
I Presentación formal	2	4	3	4	
J Resumen	1	2	2	2	
K Valoración global	2	4	3	4	
Total (máximo 36)	18		29		

mbre del examinador 1: [redacted] Número de examinador: [redacted]
YÚSCULAS]

mbre del examinador 2: [redacted] Número de examinador: [redacted]
YÚSCULAS]

mbre del examinador 3:______________________ Número de examinador:__________
YÚSCULAS]

Para uso exclusivo de la oficina del IB en Cardiff: **B:** ✓

Para uso exclusivo de la oficina del IB en Cardiff: **A:** 10/6/15 **Fecha:** 11/7

En qué consiste?

Resumen

Mi intención a la hora de hacer un trabajo sobre el Problema Isoperimétrico era empezar estudiando figuras geométricas simples e ir pasando a figuras más complejas para llegar tan lejos como me fuera posible.

Con triángulos y cuadriláteros conseguí demostrar que el triángulo equilátero y el cuadrado, respectivamente, eran las figuras de máxima superficie con un mismo perímetro.

Seguidamente, al centrarme en los pentágonos, llegué a que, al igualar la medida de los lados, la superficie aumentaba. Faltó igualar los ángulos para llegar al pentágono regular.

A continuación vi que, a medida que la simetría de una figura aumentaba, mayor era su área. Además llegué a que toda parte cóncava, puede "reflejarse" en otra de convexa aumentando el área de la figura.

Conseguí hallar una fórmula que relacionara la superficie de cualquier polígono regular con su perímetro y el número de lados, de modo que, tras el estudio de la función, pude demostrar que, de entre todas las figuras geométricas, la que tiene mayor superficie dado un perímetro fijo es la circunferencia.

Finalmente, hice un repaso de las contribuciones realizadas por distintos matemáticos a lo largo de la historia para ver la evolución de la resolución del Problema Isoperimétrico.

Falta claridad en qué consistió el trabajo de investigación!

Código alumno:

Grupo: 2º de Bachillerato A

Departamento: Matemáticas

Tutoría:

- No es claro si la intención es hacer el estudio del problema isoperimétrico o además hacer un repaso histórico, las 2 cosas darían varios tomos!
- No hay tan solo una referencia bibliográfica, incluso la parte histórica parece ser autoría de la candidata.
- Los procesos y la redacción en ocasiones no son suficientemente explícitos por lo que queda la sensación de una mera transcripción de datos.

El Problema Isoperimétrico y su resolución a través de la historia

Código alumno:

Grupo: 2º de Bachillerato A

Departamento: Matemáticas

Tutoría:

Número de palabras: 3716

Todo mi agradecimiento para la profesora

por su paciente tutorización de este trabajo y por su dedicación,

robándole horas a su apretada agenda.

Índice de contenidos

1. Introducción

Uno de los problemas que han fascinado a numerosos matemáticos a lo largo de la historia es el problema isoperimétrico. Ver, de entre todas las figuras geométricas de mismo perímetro, cuál es la que tiene la máxima superficie.

Por otro lado actualmente vivimos inmersos en una profunda crisis económica así que nos puede interesar reducir al máximo los recursos necesarios para la producción de bienes.

Cuáles que involucren área y perímetro

La aplicación del problema isoperimétrico en temas como la construcción de edificios o el diseño de campos de cultivo podría suponer una mejora en los costes de producción.

¿Qué relación tiene eso con el problema de los isoperimétrico?

Imagen 1: Campos circulares de las zonas desérticas de Estados Unidos para optimizar los costes de regadío

Esto es otro problema

Mi objetivo es intentar resolver el problema empezando por figuras geométricas simples, como los triángulos o los rectángulos, e ir pasando a figuras más complejas.

Intentaré, asimismo, llegar a la obtención de una fórmula que permita determinar la superficie de cualquier polígono regular en función de su perímetro y el número de lados.

A continuación, intentaré encontrar la solución del problema para recintos limitados por curvas cerradas y simples.

Finalmente, una vez comprendida la complejidad del problema isoperimétrico, haré un repaso de las contribuciones realizadas por matemáticos, como Zenodoro o los hermanos Bernouilli. Haber reflexionado detenidamente sobre el problema me permitirá valorar más estas aportaciones.

2. Triángulo de perímetro dado y mayor área

Proposición 1: De entre todos los triángulos de perímetro p y base a el que tiene mayor área es el triangulo isósceles de base a.

Sabemos que la superficie de un triángulo es el semiproducto de la base por la altura.

Por lo tanto, si mantenemos la base *(a)* fija vemos que, para aumentar el área de un triángulo cualquiera y mantener el perímetro, debemos formar el triángulo con la mayor altura posible.

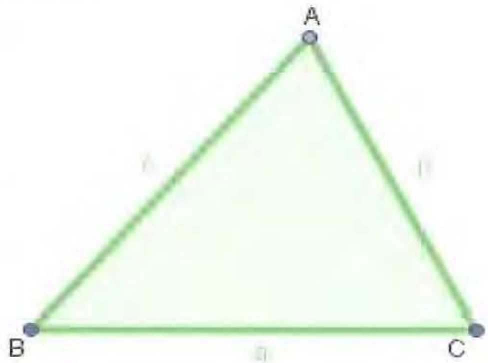


Imagen 2

Partimos de un triángulo de lados a, b, c: $a \geq b \geq c$ y perímetro p. Empezamos fijando 2 vértices (B, C), vemos que la suma de las longitudes de los lados b, c es una constante, $p-a$. Con a y p positivos, $a < p$.

Esto nos muestra que el lugar geométrico del vértice A es una elipse, cuyos focos son los vértices (B, C) y su eje mayor es $p-a$.

Por lo tanto, de todos los triángulos posibles con base a, el de mayor área es el isósceles de lados iguales $\frac{p-a}{2}$.

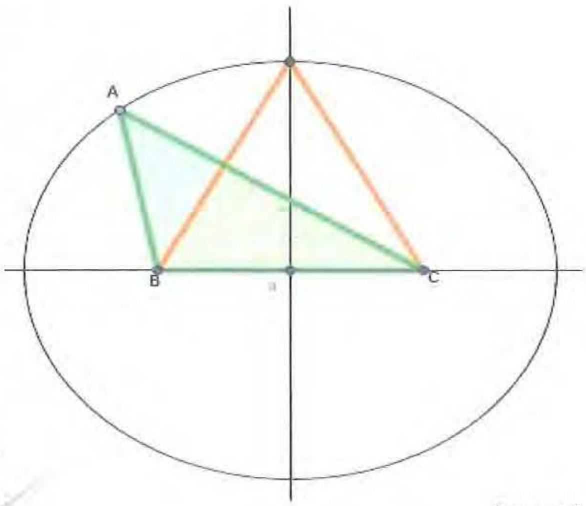
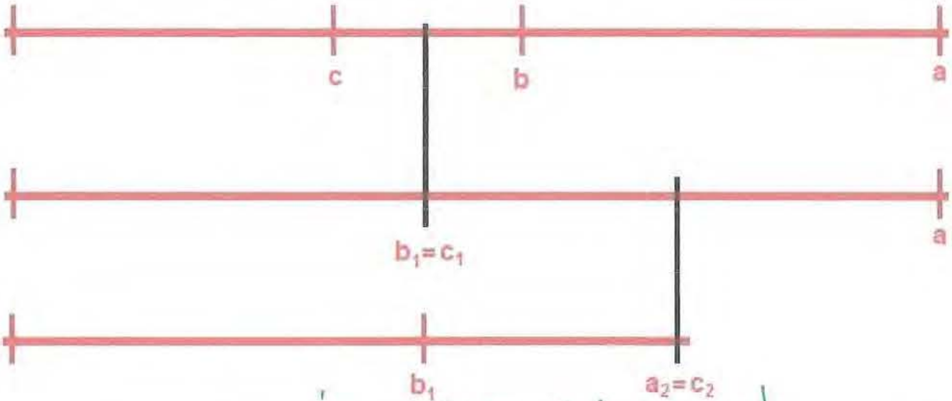


Imagen 3

Proposición 2: De entre todos los triángulos isoperimétricos la superficie mayor la tiene el triángulo equilátero.

En efecto, siguiendo el procedimiento empleado en la *Proposición 1*, podemos empezar con un triángulo isósceles de lados $a, \frac{p-a}{2}, \frac{p-a}{2}$.

Fijamos uno de los lados iguales, el lado $b_1 = \frac{p-a}{2}$. De todos los triángulos de base b_1 buscamos el que tenga la altura mayor, el isósceles de lados $b_1, \frac{a+b_1}{2}, \frac{a+b_1}{2}$.



¡una infinidad de veces!

Imagen 4

Hay métodos más simples para establecer eso (Por ejemplo por medio de la fórmula de Heron)

Si realizamos la *Proposición 2* repetidamente iremos igualando los lados del triángulo de acuerdo con el esquema de la *imagen 4*. Eso se debe a que, una vez tenemos un triángulo isósceles, la diferencia entre los lados mayor y menor va disminuyendo.

Así que, de este modo, conseguimos igualar los lados del triángulo para conseguir convertirlo en equilátero. Este, tal y cómo hemos anunciado, conservará el perímetro del triángulo inicial aumentando su superficie.

3. Rectángulo de perímetro fijo y mayor área

Proposición 3: De entre todos los rectángulos de perímetro *p=4a* el cuadrado es el de mayor área.

Una demostración para resolver la proposición, teniendo en cuenta que la superficie corresponde a $Area = base \times altura$, seria comparar la superficie de un cuadrado con la de un rectángulo cualquiera.

De este modo vemos que si se tratara de un cuadrado se obtiene $Area = a \times a$, en cambio, en caso de ser un rectángulo debemos elegir una constante (un número real positivo cualquiera, *x*) para sumarla en un lado y restarla en el otro quedando $Area = (a+x) \cdot (a-x)$.

A partir de esto vemos que el área del rectángulo es $Area = a^2 - x^2$, que es menor que la del cuadrado, $Area = a^2$.

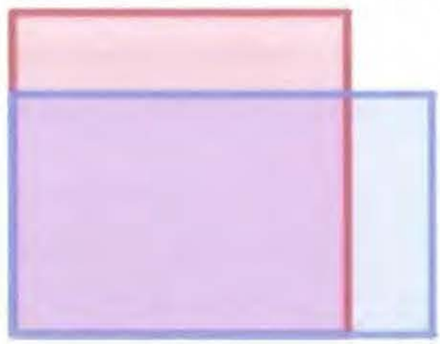


Imagen 5

Por otra parte, si superponemos gráficamente un cuadrado y un rectángulo isoperimétricos *(Imagen 5)* vemos que la superficie del cuadrado es superior a la del rectángulo ya que, la parte no superpuesta del cuadrado corresponde a un área de *ax* y, la parte no superpuesta del rectángulo $ax\text{-}x^2$.

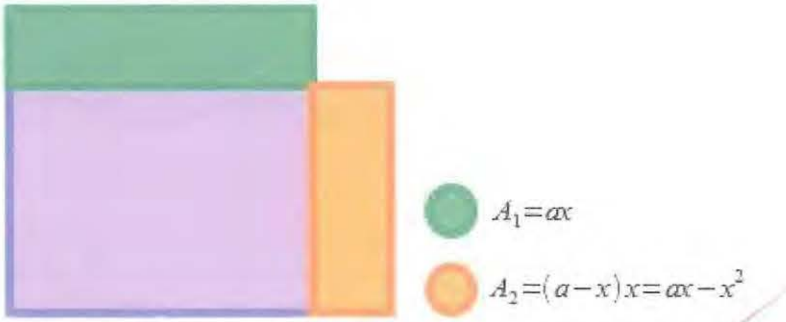


Imagen 6: Superficie sobrante del cuadrado y el rectángulo superpuestos

4. Cuadriláteros de perímetro fijo y mayor área

En la *Proposición 3* hemos estudiado cual era el rectángulo de mayor área manteniendo el perímetro fijo: el cuadrado.

Ahora nuestra intención es generalizar el problema para todo tipo de cuadriláteros.

Proposición 4: Dado un cuadrilátero cualquiera de perímetro fijo, el cuadrado es el de mayor área.

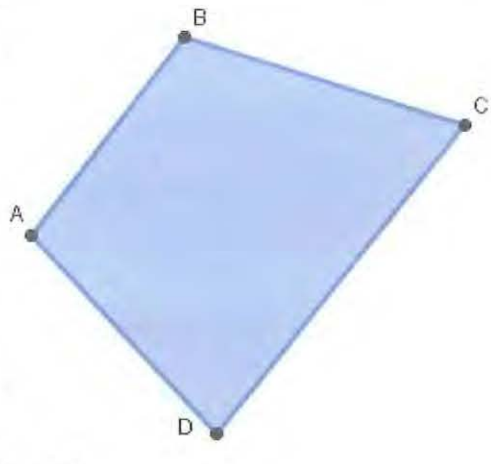


Imagen 7

4.1-Transformación de un cuadrilátero cualquiera en un rombo del mismo perímetro y mayor área:

Tenemos un cuadrilátero cualquiera y, a través de su diagonal, lo dividimos en dos triángulos que compartan esta diagonal como base. Una vez dividido el cuadrilátero nos fijamos en cada uno de los triángulos individualmente.

Da impresión de no ser la redacción del candidato

En primer lugar, y siguiendo los pasos presentados en la *Proposición 1*, centramos nuestra faena en aumentar la altura de cada uno de los triángulos. En otras palabras, transformamos unos triángulos escalenos en otros de isósceles de igual perímetro y de mayor área (*Imagen 8*).

Si el proceso se lleva a cabo repetidamente diversas veces, dividiendo el nuevo cuadrilátero por la otra diagonal sucesivamente, conseguimos transformar el cuadrilátero irregular inicial en un rombo de mismo perímetro pero mayor superficie.

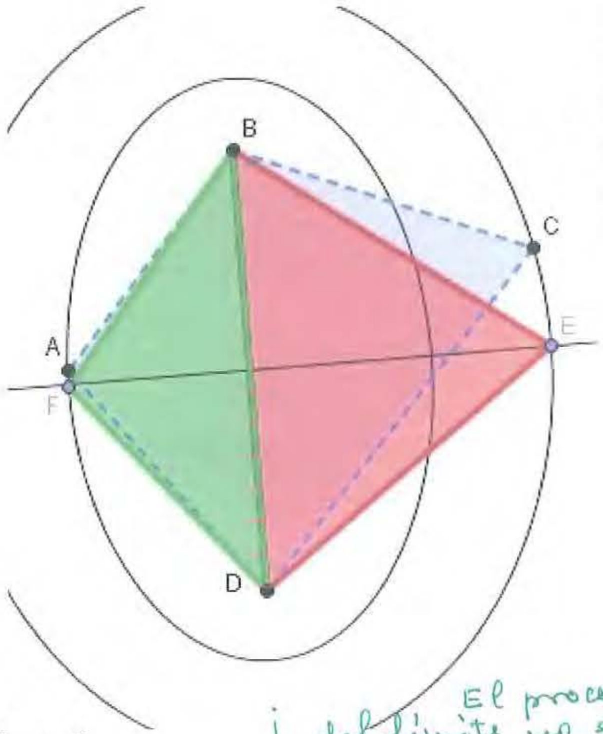


Imagen 8

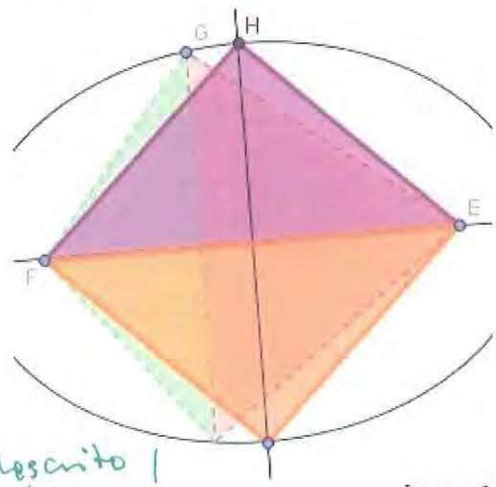


Imagen 9

¡El proceso del límite no es descrito con mucha precisión!

4.2-Transformación de un rombo a un cuadrado manteniendo el perímetro fijo y aumentando el área:

En la primera parte de la *Proposición 4* hemos conseguido llegar a un rombo cuyos lados tienen la misma longitud, digamos *a*.

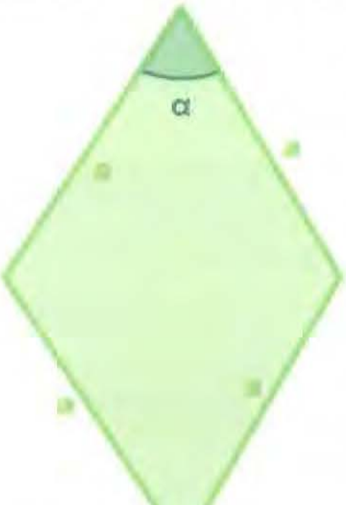


Imagen 10

Sin embargo los ángulos de este son desconocidos y, debido a que el área de un cuadrilátero es $A = a \cdot a \cdot sen\,\alpha$ buscamos al cuadrilátero con mayor área.

Por ello necesitamos que el valor de *sen α* sea máximo: $sen\,\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^o$, considerando α uno de los dos ángulos agudos del rombo (*Imagen 10*).

Esto nos indica que el área será máxima cuando sea $A = a \cdot a \cdot sen\,\alpha = a^2$, por lo tanto la mayor superficie corresponde un cuadrado de lados *a*.

5. Pentágono de perímetro fijo y mayor área

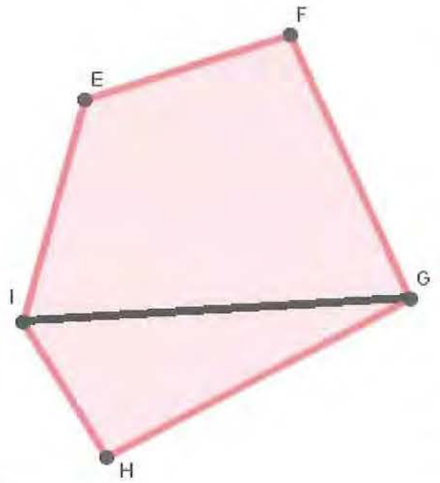


Imagen 11

De entre todos los pentágonos del mismo perímetro, ¿cual es el de mayor superficie posible?

Todos los pentágonos pueden dividirse en un triángulo y un cuadrilátero que compartan un lado en común.

Este lado que comparten no forma parte del perímetro del pentágono ya que queda en el interior de la figura, pero podemos fijarlo como base del triángulo.

En la *Proposición 1* vimos que podíamos aumentar la altura de cualquier triángulo escaleno transformándolo en uno de isósceles.

El siguiente paso que debemos hacer es seguir aplicando la primera proposición dividiendo el nuevo pentágono en otros dos cuadriláteros y triángulos y repetir el proceso.

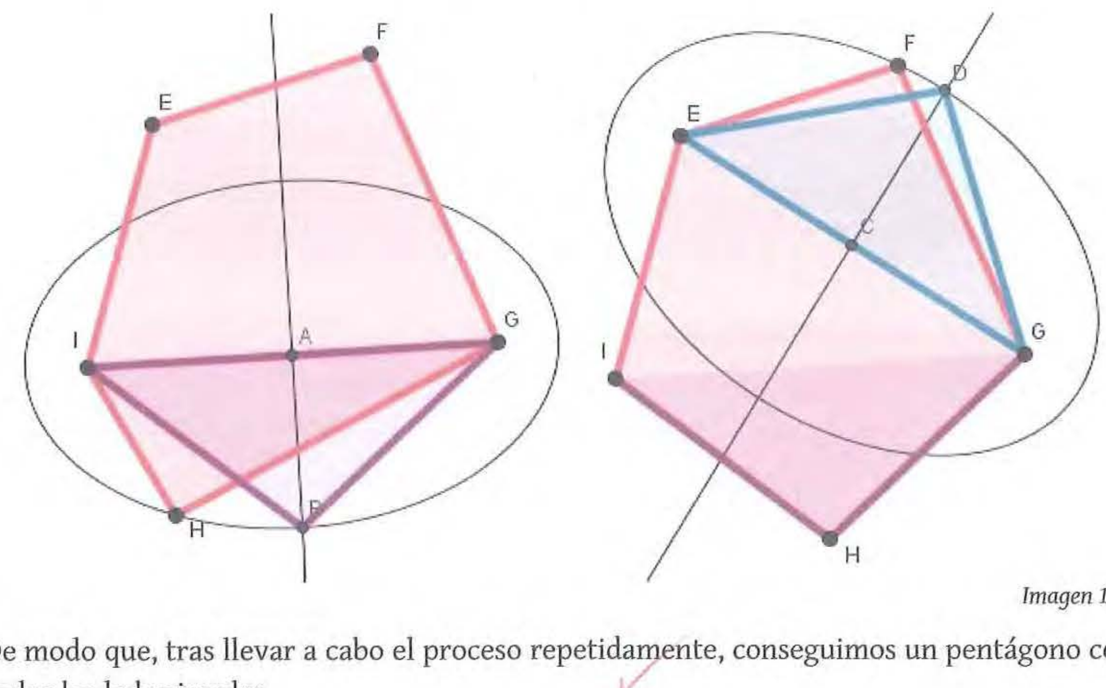


Imagen 12

De modo que, tras llevar a cabo el proceso repetidamente, conseguimos un pentágono con todos los lados iguales.

Pero que los lados sean iguales no significa que los ángulos también lo sean.

Esto nos indica que el pentágono obtenido no es necesariamente el pentágono de mayor superficie.

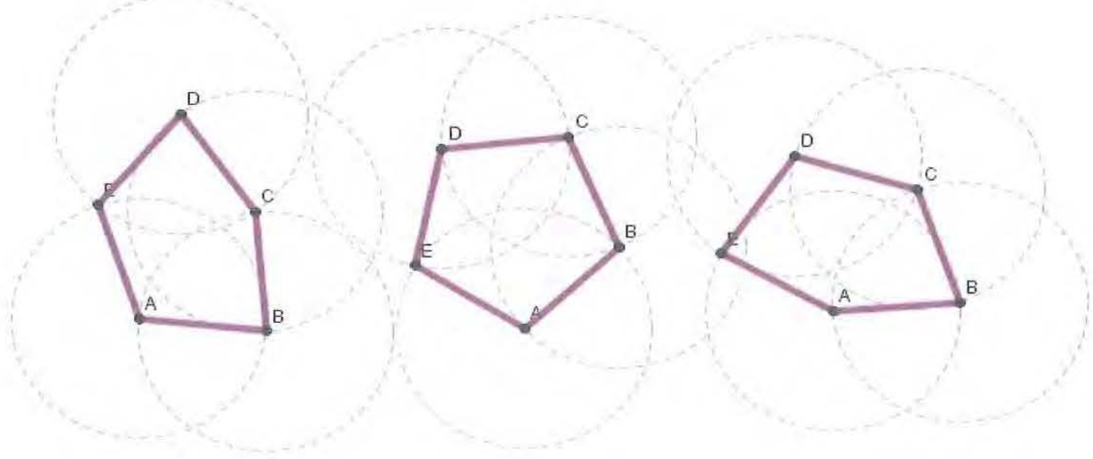


Imagen 13

Tal y cómo vemos en el esquema de la *imagen 13* hemos aumentado el área pero no podemos asegurar haber conseguido el pentágono de mayor área, el pentágono regular.

6. ¿Cuál sería la curva cerrada y simple con mayor superficie y un perímetro fijo?

6.1. ¿Cóncava o convexa?

Dada una curva simple y cerrada cualquiera, ¿debe ser cóncava o convexa, la de mayor superficie?

Las partes cóncavas de cualquier figura pueden ser "reflejadas" a través de una recta tangente a dos de sus puntos, una línea de soporte.

Con este paso transformamos una parte cóncava en otra de convexa, de modo que, con el mismo perímetro, se aumenta la superficie.

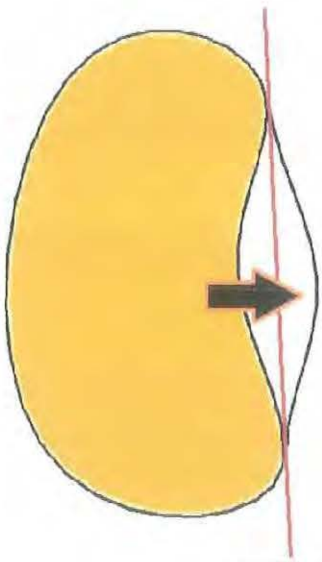
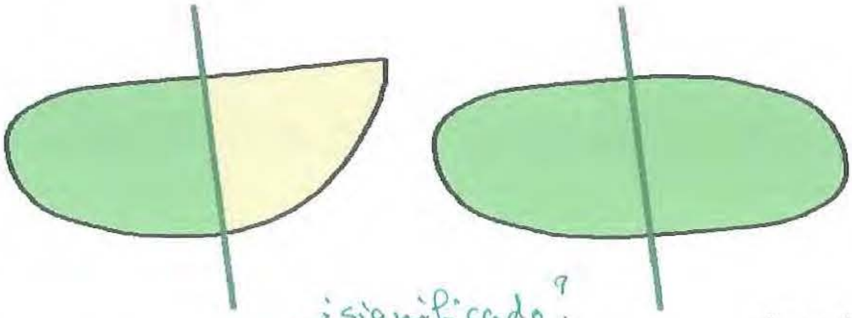


Imagen 14

6.2. ¿Simétrica o asimétrica?

Dada una curva cerrada y simple convexa, ¿debe ser simétrica o asimétrica, la de mayor superficie?

Si dividimos la figura en dos partes de mismo perímetro una de ellas contiene mayor área que la otra. Por lo que, si escogemos la de área mayor y la sustituimos por la otra nos encontramos con una figura isoperimétrica a la anterior pero con mayor superficie.



¿significado?

Imagen 15

De modo que la curva simple y cerrada con mayor área, a parte de ser ser convexa, debe ser completamente simétrica.

7. La isoperimetría y los polígonos regulares

Como hemos podido comprobar con los casos de triángulos y cuadriláteros, a medida que conseguimos figuras con más simetría, mayor es la superficie de estos.

Esto nos indica que los polígonos regulares tienen una superficie mayor que los irregulares y, en consecuencia, la circunferencia (curva cerrada, simple, convexa y simétrica), al tener infinitos ejes de simetría, tendrá mayor superficie que cualquier otra figura geométrica.

Nuestro objetivo es deducir una fórmula que nos permita calcular la superficie de los polígonos regulares en función del perímetro y el número de lados.

Para empezar observamos que los polígonos regulares pueden dividirse en triángulos iguales (*Imagen 16*).

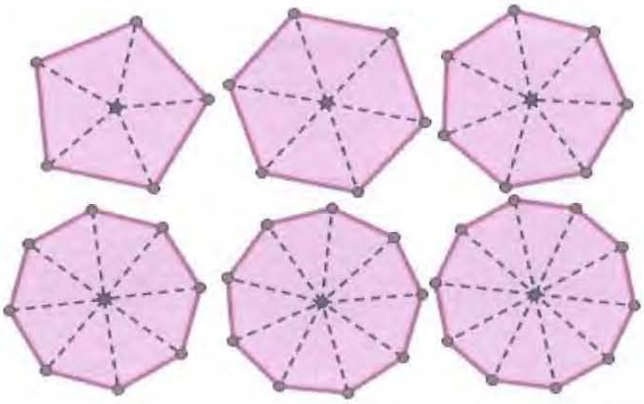


Imagen 16

Para facilitar el trabajo nos centraremos principalmente en los triángulos, independientemente del polígono regular al que pertenecen y, finalmente, multiplicaremos la superficie del triángulo por el total de triángulos de cada figura, que coincide con el número de lados del polígono regular.

7.1. Área de un polígono regular en función de su perímetro y del número de lados

Ya centrándonos en la fórmula que intentamos encontrar y que nos permitirá determinar la superficie según el perímetro y el número de lados empezamos teniendo en cuenta que los triángulos que se forman son isósceles (excepto los del hexágono, que son equiláteros).

Al ser triángulos isósceles los dos lados que no pertenecen al polígono original son iguales $b = b'$.

Empezamos escogiendo un perímetro p y el número de lados del polígono n.

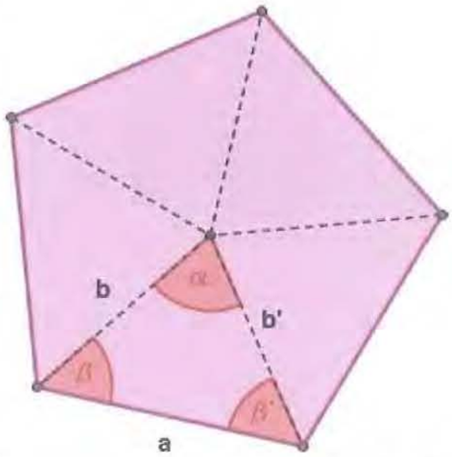


Imagen 17

Según el *Teorema del seno:* $\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}$ así que $b = \frac{a \cdot sen\,\beta}{sen\,\alpha}$.

También sabemos que $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ y $\beta = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$.

Por lo tanto podemos utilizar la fórmula: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b' \cdot sen\,\alpha = \frac{b^2 \cdot sen\,\alpha}{2}$ y multiplicarla por el número de lados, es decir, el total de triángulos que forman la figura. $S = \frac{b^2 \cdot sen\,\alpha}{2} \cdot n = \frac{b^2 \cdot sen(\frac{2\pi}{n})}{2} \cdot n$

Si $b = \frac{a \cdot sen\,\beta}{sen\,\alpha} = \frac{\frac{p}{n} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)}{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$ entonces

$$S(n, p) = \frac{\left(\frac{\frac{p}{n} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)}{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right)^2 \cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot n}{2} .$$

Simplificando y buscando la superficie según el número de lados de la figura nos queda la función: $S(n,\, p)=\dfrac{p^2}{2n}\cdot\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{sen\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}=\dfrac{p^2}{4n}\cdot\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$ Siendo p el perímetro y n el número de lados del polígono regular.

7.1.1. Ejemplos del problema

Ahora que ya tenemos una fórmula que nos permite calcular el área de las figuras según su perímetro y el número de lados podemos ver en algunos ejemplos las aplicaciones de las proposiciones que nos hemos planteado.

Vamos a mantener el perímetro fijo (*p=100*) y variaremos el número de lados para ver que sucede:

- CINCO LADOS, (*n=5*)

$$S=\frac{100^2}{20}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)}{sen\left(\dfrac{\pi}{5}\right)}\approx 688{,}2$$ unidades?

- SEIS LADOS, (*n=6*)

$$S(6)=\frac{100^2}{24}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{sen\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}\approx 721{,}7$$

- SIETE LADOS, (*n=7*)

$$S(7)=\frac{100^2}{28}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)}{sen\left(\dfrac{\pi}{7}\right)}\approx 741{,}6$$

Como podemos ver en estos tres ejemplos, si mantenemos el perímetro fijo y únicamente cambiamos el número de lados del polígono regular, se cumple lo que habíamos dicho anteriormente, la superficie va aumentando a medida que lo va haciendo el número de lados.

Eso quiere decir que el círculo tiene que tener mayor área?

7.1.2. Variación del área en función del número de lados

$$S(n)=\frac{p^2}{4n}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Consideramos un perímetro p fijo, $p>0$.

El dominio de la función está restringido por:

$n\in\mathbb{N}$

$n\geqslant 3$

Lo que significa que n debe ser un número natural mayor que 3 ya que no se puede formar ningún polígono con solo dos lados.

¿Por qué?

Empezaremos estudiando la función a través de su derivada según n y, considerando el perímetro p constante, veremos si es siempre positiva ya que, en consecuencia, la función $S(n)$ será creciente:

OK ~~¡Es intuitivo! La función es creciente con n luego su máximo es cuando n→∞~~

$$S'(n)=\frac{p^2}{4}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^3\cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\left[\frac{p^2}{4\cdot n^3\cdot sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right]\cdot\left[\pi-\left(sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right]$$

Vamos a descomponer la derivada en dos factores para estudiarlos por separado:

- El primer factor de la derivada, $\dfrac{p^2}{4\cdot n^3\cdot sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, es siempre positivo ya que $p^2>0$ y $4\cdot n^3\cdot sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)>0$.
- El segundo factor también es positivo: $\pi-\left(sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ ya que $sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ nunca es más de 1 y $\pi-1>0$.

Vemos que la derivada es positiva, cosa que nos indica que la función será creciente. Dicha función puede representarse con el programa informático *GeoGebra 4* para observar que, una vez restringido el dominio, la superficie va aumentando a medida que lo hace el numero de lados. (*Imagen 18*)

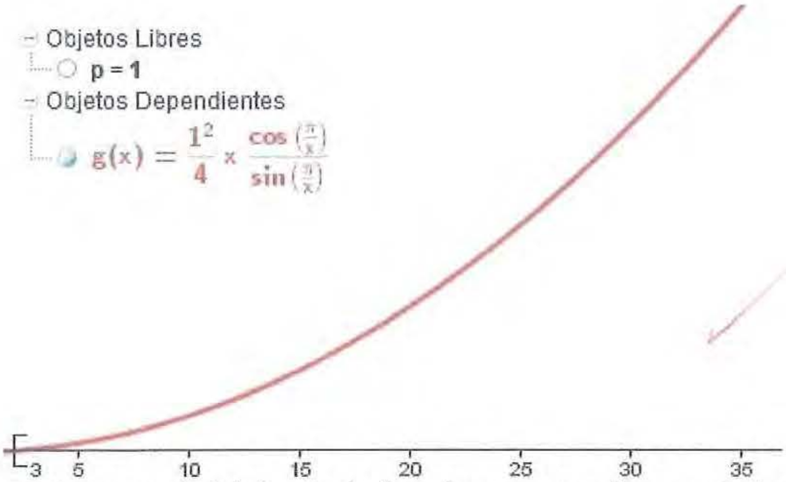


Imagen 18: Representación de la función S(n,p) con el programa GeoGebra 4 asumiendo p=1.

De hecho, la función también puede expresarse del siguiente modo:

$$S(n)=\frac{p^2}{4\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Y puesto que:

$$\lim_{n\to\pm\infty}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\pm\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}=1$$

El máximo de la función *S(n)*, cuando *n* tiende hacia infinito es $\frac{p^2}{4\pi}$.

En este caso, si *n* tiende a infinito, vemos que la figura geométrica resultante es la circunferencia esperada por lo que, si sustituimos el perímetro *p* por $2\pi r$ nos queda la superficie de la circunferencia $S(n)_{máx}=\pi r^2$.

$$S(n)_{máx}=\frac{p^2}{4\pi}=\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\frac{4\pi^2 r^2}{4\pi}=\pi r^2$$

A partir de la demostración y con el soporte gráfico de la *Imagen 18* vemos que la función *S(n)* es creciente por lo que, dado un perímetro *p* fijo, a mayor número de lados mayor superficie, que llevado a número de lados infinitos corresponde a la circunferencia.

Proposición 5: De entre todas las figuras geométricas con perímetro p fijo, la de mayor superficie es la circunferencia.

¿y se demuestra? Se enuncia como conclusión?

8. El problema isoperimétrico a lo largo de la historia

8.1. Leyenda

Los inicios del problema los encontramos en hechos ficticios, en una leyenda explicada por el poeta Virgilio hace veintiún siglos: la leyenda de la princesa o reina (según la versión) Dido.

Dido era una princesa fenicia, hermana del rey Pigmalión, que debido a unas disputas familiares para conseguir el poder tuvo que huir de Tiro y refugiarse a las costas del norte de África.

Allí la reina intentó comprar terrenos para ella y sus seguidores de un modo muy astuto. Hizo un acuerdo donde estableció que se podría quedar con la tierra que abarcara la piel de un buey.

Para conseguir un reino lo más grande posible, Dido, hizo un hilo con tiras atadas de piel de buey y lo extendió formando una semicircunferencia. Su inteligencia le permitió además colocarla al lado del mar, con lo que la costa dividía la circunferencia por la mitad y les proporcionaba a sus súbditos un terreno más extenso.

Así es como, según la leyenda de Virgilio, la reina consiguió el terreno para construir su nueva ciudad, Qart-Hadah, actualmente llamada Cártago.

8.2. Euclides (aprox. 325-265 aC)

Inicialmente, sin centrarse específicamente en el problema, algunos matemáticos griegos aportaron pequeñas demostraciones aplicables en el problema de la reina Dido. Uno de estos antiguos matemáticos fue Euclides con su tratado matemático y geométrico "*Los Elementos*" escrito cerca del 300 a.C.

En su obra demostró la relación entre los cuadriláteros y llegó a que el cuadrado es la figura que permite encerrar una mayor área.

Imagen 19: Fragmento de los Elementos de Euclides

Sin embargo su intención no era centrarse en el problema isoperimétrico, por lo que su demostración no iba dirigida a resolver la leyenda y no continuó con la resolución.

8.3. Zenodoro (aprox. 200-140 aC)

Pero esta relación del problema con la leyenda hizo que muchos matemáticos se interesasen por la isoperimetría. El primero de todos ellos en estudiar a fondo el problema fue el geómetra griego del siglo II a.C., Zenodoro.

Estudió el problema en su ensayo "*Sobre las figuras isoperimétricas*" pero, desgraciadamente, la demostración se ha perdido. Sin embargo tenemos escritos de Teón de Alejandría donde se nombran descubrimientos de Zenodoro que nos indican que estaba resolviendo el problema correctamente.

El único problema es que lo dejó inacabado, es decir, terminó la resolución cuando demostró que las cónicas son los elementos que abarcan una superficie mayor con un perímetro igual a cualquier otra forma pero no demostró que la de mayor área es la circunferencia.

¿A que se debe que no completara su resolución? Primero debemos tener en cuenta que los conocimientos de cónicas en aquella época eran inferiores a los actuales, además tampoco disponían de las herramientas (teoremas, hipótesis...) que han demostrado matemáticos posteriores al siglo II a.C.

Así que Zenodoro llegó a lo más lejos que podía llegar por aquel entonces, pero que, posteriormente, otros matemáticos han descubierto y aportado nuevas ideas que permiten resolver el problema más extensamente.

No obstante el ensayo perdido de Zenodoro se puede considerar uno de los primeros trabajos relacionados con las figuras óptimas, o lo que es lo mismo, sobre el estudio del cálculo variacional.

8.4. Johannes de Sacrobosco (aprox. 1195-1256 dC)

Pero los matemáticos no eran los únicos que se interesaban por la isoperimetría. Johannes de Sacrobosco, también conocido como John of Holywood, un monje y astrónomo inglés escribió el "*Tratado de la esfera*", un tratado de astronomía que enunciaba distintas propiedades de las esferas. Su intención era demostrar porqué la circunferencia y las esferas es un elemento necesario en la creación del universo (planetas, satélites, estrellas, etc).

En el tratado se menciona que las esferas son las figuras que, con una superficie dada, encierran un volumen máximo. Para la demostración se basa en el estudio de las tres dimensiones. ¿?

Estas explicaciones las podemos ver nada más empezar el tratado, en el primer capítulo:

> *«THE HEAVENS SPHERICAL: There are three reasons why the sky is round: likeness, convenience, and necessity. [...] Convenience, because of all isoperimetric bodies the sphere is the largest and of all shapes the round is most capacious. Since largest and round, therefore the most capacious. Wherefore, since the world is all-containing, this shape was useful and convenient for it. [...]»* (1)

Imagen 20: Copia del "Tratado de la esfera".

8.5. Newton (1643-1727)

Durante el siglo XVII el cálculo infinitesimal se desarrolló increíblemente gracias a autores como Descartes, Pascal, Leibniz o Newton. Este último se centró en concreto en lo que, posteriormente, serían las bases que permitirían a otros matemáticos resolver el problema isoperimétrico gracias a problemas de optimización. ¿?

tautología

8.6. Bernouilli

Cuando la resolución del problema avanzó con mayor rapidez fue a partir de los estudios de los hermanos Jakob y Johann Bernouilli. Estos establecieron una relación entre el problema isoperimétrico y la optimización.

¡ MUY INADECUADO

Los cálculos de variaciones son problemas matemáticos que se encargan de buscar máximos y mínimos, o generalmente extremos relativos, de funciones continuas.

Pero antes de llegar a esta parte primero nos vamos a centrar en la familia Bernouilli.

8.6.1. Jakob (1654-1705)

Jakob Bernouilli, también conocido como Jacques o James, fue el quinto hijo de una familia de grandes matemáticos. Nació el 27 de diciembre de 1654 y murió el 16 de agosto de 1705 en la ciudad suiza de Basilea. Estudió teología pero sus aficiones eran la física y las matemáticas, con las que destacó notablemente.

8.6.2. Johann (1667-1748)

Johann Bernouilli, también conocido como Jean o John, fue el décimo hijo de la familia Bernouilli. Estudió medicina en la Universidad de Basilea, Suiza. A pesar de ello, y al igual que su hermano, sus intereses siempre estuvieron centrados en los números.

Estas aficiones fueron las causantes de crear una gran rivalidad entre ambos hermanos, pero en vez de ser un inconveniente, esta competición llevó consigo un conjunto de descubrimientos y resoluciones matemáticas entre ambos hermanos.

Centrándonos de nuevo en nuestro problema vemos que Jakob fue el primero en interesarse por el problema isoperimétrico. Este, siguiendo la costumbre de las competiciones, retó Johann a resolver un ejemplo del problema en tres meses y dar la solución final en un año. E incluso le ofreció una recompensa de 50 escudos.

Johann, publicó un avance de la solución en "*Historie des ouvrages des Savants*" (1697) pero resultó ser incorrecto. El resultado correcto lo envió en una carta para Jakob con órdenes de no abrir el sobre hasta que éste terminara su propia demostración.

Jakob lo resolvió con un profundo análisis en "*Acta Eruditorum*" (1701) pero el sobre no se abrió hasta ocho meses después de su muerte, en abril de 1706.

Esta competición entre los hermanos Bernouilli aportó las bases de las futuras resoluciones llevadas a cabo por matemáticos como Leonhard Euler y Joseph-Louis Lagrange.

8.7. Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler, que se podría considerar el matemático más influyente del siglo XVIII, fue el siguiente en estudiar el problema isoperimétrico tras los descubrimientos de los Bernouilli.

Ambas famílias de matemáticos se conocían, pues Euler nació a un pueblo cerca de Basilea, Suiza. Esta amistad es la que hizo que se interesase por los números y, en consecuencia, Johann Bernouilli pasó a ser su profesor particular. También hizo amistad con los hijos de Bernouilli (Nikolaus, Daniel y Johann II).

Su contribución se centró en generalizar los avances presentados por Jakob y Johann.

8.8. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Joseph-Louis Lagrange, con sólo diecinueve años, consiguió resolver el problema isoperimétrico a partir de las bases del cálculo variacional de los Bernouilli.

La solución la envió en una carta para su amigo Leonhard Euler, el cual se sintió muy interesado por el resultado ya que concordaba con el que él había obtenido años antes.

Euler respondió la carta sin mencionar su descubrumiento por lo que toda la fama fue para Lagrange. Además Lagrange, a parte de resolver el problema, también inventó un nuevo tipo de cálculo de variaciones.

8.9. Jakob Steiner (1796-1863)

Finalmente, con un punto de vista totalmente distinto, encontramos otra contribución por parte del matemático suizo Jakob Steiner.

En 1838 había dos puntos de vista distintos en referencia a los métodos de resolución matemáticos. La decisión estaba entre el cálculo y la geometría.

Steiner se decantó por la última, de modo que pasó por alto la resolución final de Joseph-Louis Lagrange gracias a las aportaciones del cálculo de variaciones de los hermanos Bernouilli. Y, mediante métodos geométricos, hizo un par de descubrimientos importantes:

El primero de ellos fue la simetrización ya que, mediante una línea de soporte, reflejaba las áreas cóncavas de la figura geométrica a convexas. Con esta idea conseguía aumentar la superficie manteniendo el perímetro fijo.

Finalmente su otra contribución en el proyecto fue la demostración de que la figura debería ser totalmente simétrica para poder mantener la mayor área posible. Que, como mayor simetría conseguía una figura, más superficie tenía.

Toda esta parte histórica no agrega nada al interés de la monografía ya que no tiene contenido matemático (demasiado resumido y carente de explicaciones adecuadas)

9. Conclusiones

Mi intención era resolver el problema isoperimétrico empezando desde casos fáciles y concretos e ir aumentando la investigación y la dificultad por lo que he comenzado demostrando que, el triángulo equilátero, es el que contiene mayor área entre los triángulos y que, el cuadrado, lo hace entre los cuadriláteros.

Seguidamente me he centrado en los pentágonos y he visto que, a medida que se igualaba la medida de los lados, la superficie aumentaba. Faltaba igualar los ángulos para llegar al pentágono regular.

A continuación he llegado a que, a mayor simetría, mayor es el área de una figura y, que toda parte cóncava, puede "reflejarse" en otra de convexa aumentando el área de la figura.

Posteriormente he buscado una fórmula para determinar la superficie de los polígonos regulares según el número de lados y su perímetro. Cuál fue ?

He estudiado la función obtenida, fijando un perímetro $p>0$, para determinar la superficie a partir del numero de lados. Esto me ha permitido descubrir que, al ser una función creciente, una vez restringido el dominio, la curva cerrada y simple, convexa y simétrica, con mayor superficie es la circunferencia.

Finalmente, a parte de resolver el problema, he visto la evolución y los pasos de éste a lo largo de la historia, a través de los matemáticos que se han interesado por su resolución.

Es difícil determinar cual es la contribución personal de la candidata en esta monografía, pero dandole el beneficio de la duda, muestra originalidad y creatividad.
La monografía es clara, bien presentada, y pese a unos lapsos en algunos razonamientos, relativamente convincente

10. Citas

(1) GRANT, EDUARD. *A source book in medieval science.* 1a ed., Cambridge: Harvard University Press, 1974. Pág. 443 http://books.google.cat/books?id=fAPN_3w4hAUC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false [consulta de 29 de agosto de 2011]

11. Bibliografía

ASHBAUGH, M., BENGURIA, R. *El Problema de la Reina Dido: Panorama sobre los Problemas de la Isoperimetría.* Revista Joven Matemático, Edición 1, 2010. http://www.fis.puc.cl/~rbenguri/117.pdf [consulta de 29 de julio de 2011]

BOGOMOLNY, ALEXANDER. *Isoperimetric Theorem and Inequality.* http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/isoperimetric.shtml [consulta de 9 de agosto de 2011]

DOU, ALBERTO. *Orígenes del cálculo de variaciones,* http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1988_00_00_05.pdf [consulta de 21 de agosto de 2011]

DUNHAM, WILLIAM. *El universo de las matemáticas.* Madrid: Ediciones Pirámide, 2001.

GRANT, EDUARD. *A source book in medieval science.* 1a ed., Cambridge: Harvard University Press, 1974. http://books.google.cat/books?id=fAPN_3w4hAUC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false [consulta de 29 de agosto de 2011]

HARO, M.J., PÉREZ, M.J. *Problemas isoperimétricos.* Revista digital PROGRAMAS, número 2, 2010. http://www.abcep.es/revistadelcep/attachments/005_Problemas%20isoperim%C3%A9tricos%20nueva%20versi%C3%B3n.pdf [consulta de 1 de agosto de 2011]

MAGALLÓN, EDUARDO. *Los hermanos Bernoulli.* Universidad de Madrid. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/La%20familia%20%20Bernoulli.pdf [consulta de 19 de agosto de 2011]

Leonhard Euler. La Red de la Educación 2.0. http://www.educared.org/global/premiointernacional/finalistas/710/biograf/Beuler.html [consulta de 25 de agosto de 2011]

O'CONNOR, J., ROBERTSON, E. *Zenodorus.* HTTP://WWW-HISTORY.MCS.ST-AND.AC.UK/HISTORY/BIOGRAPHIES/ZENODORUS.HTML [consulta de 3 de agosto de 2011]

OLGUÍN, JUAN. *Sobre una desigualdad isoperimétrica en superficies de curvatura no negativa,* http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol026/tesisjuan.pdf [consulta de 9 de agosto de 2011]

PÉREZ, RAFAEL, *ET AL.* "El problema isoperimétrico en la Arquitectura, Literatura, Música..., en la Naturaleza". Suma, número 33 (febrero 2000) p. 103-106

PÉREZ, RAFAEL, *ET AL.* "Isoperimétricos: El problema de la existencia de solución en el problema isoperimétrico". Suma, número 41 (noviembre 2002) p. 113-115

RODRÍGUEZ, OSCAR MARIO. *Aportaciones de los Bernoulli al cálculo,* http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-2-bernoulli.pdf [consulta de 19 de agosto de 2011]

RUÍZ, ÁNGEL. *Capítulo XVI: Euler y su Tiempo.* http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte4/Cap16/Parte03_16.htm [consulta de 23 de agosto de 2011]

TREIBERGS, ANDREJS. *Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality.* http://www.math.utah.edu/~treiberg/isoperim/isop.pdf [consulta de 8 de agosto de 2011]