



Los alumnos deben llenar esta hoja y entregarla al supervisor junto con la versión final de su monografía.

Número de convocatoria del alumno	[Redacted]		
Nombre y apellido(s) del alumno	[Redacted]		
Número del colegio	[Redacted]		
Nombre del colegio	[Redacted]		
Convocatoria de exámenes (mayo o noviembre)	MAYO	Año	2012

Asignatura del Programa del Diploma en la que se ha inscrito la monografía: MATEMÁTICAS  
 (En el caso de una monografía en lenguas, señale si se trata del Grupo 1 o el Grupo 2.)

Título de la monografía: El problema de la aguja de Kakéya.

**Declaración del alumno**

*El alumno debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no reciba una calificación final.*

Confirmando que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda que la permitida por el Bachillerato Internacional.

He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otra persona, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual.

Sé que el máximo de palabras permitido para las monografías es 4.000, y que a los examinadores no se les pide que lean monografías que superen ese límite.

Esta es la versión final de mi monografía.

Firma del alumno: [Redacted Signature]

Fecha: 01/03/2012

## Informe y declaración del supervisor

El supervisor debe completar este informe, firmar la declaración y luego entregar esta portada junto con la versión final de la monografía al coordinador del Programa del Diploma.

Nombre y apellido(s) del supervisor [MAYÚSCULAS]: \_\_\_\_\_

Si lo considera adecuado, escriba algunos comentarios sobre el contexto en que el alumno desarrolló la investigación, las dificultades que encontró y cómo las ha superado (ver página 13 de la guía para la monografía). La entrevista final con el alumno puede ofrecer información útil. Estos comentarios pueden ayudar al examinador a conceder un nivel de logro para el criterio K (valoración global). No escriba comentarios sobre circunstancias adversas personales que puedan haber afectado al alumno. En el caso en que el número de horas dedicadas a la discusión de la monografía con el alumno sea cero, debe explicarse este hecho indicando cómo se ha podido garantizar la autoría original del alumno. Puede adjuntar una hoja adicional si necesita más espacio para escribir sus comentarios.

La presente monografía es el resultado de un tremendo esfuerzo intelectual por parte del candidato, que ha conseguido en ella hacer un informe personal sobre un tema matemático que aunque no requiere en realidad más que geometría elemental, es muy difícil.

\_\_\_\_\_ es un estudiante muy educado y aplicado, y muy motivado por las Matemáticas. Ha decidido que estudiará Matemáticas en la Universidad. Este año es finalista en la Olimpiada Matemática Española, y acude semanalmente a un Seminario de resolución de Problemas para preparación de Olimpiadas que se desarrolla en la Universidad de La Rioja.

Su versión de la solución de Besicovich al célebre problema de la aguja de Kakeya creo que ha quedado estupendamente lograda en cuanto a claridad de exposición, forma, concisión y figuras aclaratorias. Muy bien escrita en LaTeX, programa de composición de textos que \_\_\_\_\_ ha ido aprendiendo con entusiasmo sobre la marcha de ste y otros trabajos de Matemáticas, me parece que esta monografía es merecedora de la máxima calificación.

El supervisor debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no se otorgue una calificación final.

He leído la versión final de la monografía, la cual será entregada al examinador.

A mi leal saber y entender, la monografía es el trabajo auténtico del alumno.

He dedicado  horas a discutir con el alumno su progreso en la realización de la monografía.

Firma del supervisor: \_\_\_\_\_

Fecha: 1 de marzo de 2012

**Formulario de evaluación (para uso exclusivo del examinador)**

Número de convocatoria del alumno



**Nivel de logro**

Criterios de evaluación	Nivel de logro					
	Examinador 1	Máximo	Examinador 2	Máximo	Examinador 3	Máximo
A Formulación del problema de investigación	2 ✓	2		2		
B Introducción	2 ✓	2		2		
C Investigación	4 ✓	4		4		
D Conocimiento y comprensión del tema	4 ✓	4		4		
E Argumento razonado	4 ✓	4		4		
F Aplicación de habilidades de análisis y evaluación apropiadas para la asignatura	4 ✓	4		4		
G Uso de un lenguaje apropiado para la asignatura	4 ✓	4		4		
H Conclusión	2 ✓	2		2		
I Presentación formal	4 ✓	4		4		
J Resumen	2 ✓	2		2		
K Valoración global	4 ✓	4		4		
Total (máximo 36)	36					

Nombre del examinador 1: \_\_\_\_\_  
[MAYÚSCULAS]



Número de examinador: \_\_\_\_\_



Nombre del examinador 2: \_\_\_\_\_  
[MAYÚSCULAS]

Número de examinador: \_\_\_\_\_

Nombre del examinador 3: \_\_\_\_\_  
[MAYÚSCULAS]

Número de examinador: \_\_\_\_\_

Para uso exclusivo de la oficina del IB en Cardiff: B: \_\_\_\_\_

Para uso exclusivo de la oficina del IB en Cardiff: A: 105614

Fecha: 11/07

# EL PROBLEMA DE LA AGUJA DE KAKEYA

Monografía de Matemáticas para el Diploma del B. I.

Nº de colegio:

Nº de candidato:

Nº aproximado de palabras: 3400

# Resumen

En la presente monografía se ha pretendido realizar un trabajo de investigación acerca de un famoso problema de la Matemática planteado en 1917 y conocido como el problema de la aguja de Kakeya: ¿cuál es el área mínima de un conjunto plano en el interior del cual una aguja podría girar  $360^\circ$ ?, problema que resultó equivalente a otro enunciado por el matemático ruso A. S. Besicovitch en 1920.

En primer lugar expongo una introducción en la que explico la naturaleza del problema, así como unas notas históricas. A continuación, elaboro una presentación personal de la solución elaborada por Besicovitch, que hace uso de dos ideas fundamentales alrededor de las cuales gira la demostración: la construcción del árbol de Perron y de las uniones de Pàl. Por último, elaboro una conclusión en tono personal. Todas las figuras incorporadas son de elaboración propia.

# Índice

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN. EL PROBLEMA DE KAKEYA</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>LA SOLUCIÓN DE BESICOVITCH</b>	<b>5</b>
2.1	El árbol de Perron . . . . .	5
2.2	Las uniones de Pàl . . . . .	11
<b>3</b>	<b>CONCLUSIÓN</b>	<b>13</b>
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>14</b>

# 1 INTRODUCCIÓN. EL PROBLEMA DE KAKEYA

El problema de la aguja de Kakeya ronda ya los cien años de edad. Sin embargo, este problema casi centenario tuvo una gran repercusión a partir de 1970, y más concretamente, a partir de los años 90, pues surgieron nuevas variantes del problema profundamente relacionadas con campos de la matemática que aún en la actualidad se encuentran en desarrollo. En 1917 el matemático japonés Sôichi Kakeya propuso el siguiente problema:

**Problema de Kakeya.** *Encontrar el conjunto plano de área mínima en el que se puede hacer girar de forma continua un segmento de longitud 1 de modo que vuelva a ocupar su posición original.*

A. S. Besicovitch publicó en 1920 en una revista rusa un artículo titulado “*Sur deux questions d'intégrabilité*” en el que planteó el siguiente problema:

**Problema de Besicovitch.** *¿Existe un conjunto plano de medida (es decir, grosso modo, de área) cero que contiene un segmento de longitud 1 en cada dirección? [2]*

La revista en que dicho artículo fue publicado apenas llegó a conocerse en otros países debido al aislamiento al que Rusia se encontraba sometida por la guerra civil y el bloqueo. El problema de Besicovitch resultaba ser equivalente al de Kakeya y, de hecho, Besicovitch en 1927 resolvió el problema de Kakeya.

Aunque el enunciado del problema es considerablemente sencillo, su resolución no lo es tanto. Ante la cuestión de Kakeya, podemos encontrarnos varias figuras en las que se puede realizar un giro completo de una aguja de longitud unidad sin que ésta salga de las mismas. La más sencilla e intuitiva quizá sea el círculo de diámetro unidad (figura 1):

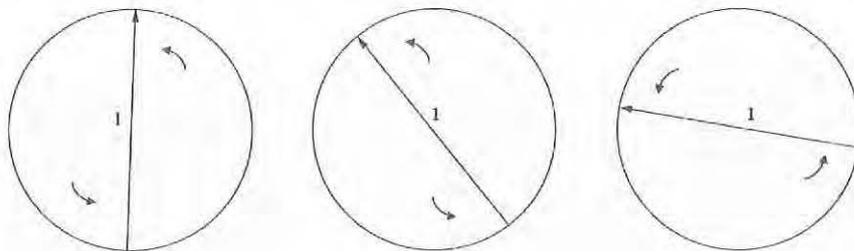


Figura 1. Aguja girando dentro de un círculo

El área de esta figura es  $S = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \simeq 0,7854 \text{ u}^2$ .

Sin embargo, existen figuras con menor área en las que se puede hacer girar  $360^\circ$  un segmento de longitud unidad de forma continua. Tal es por ejemplo el caso del triángulo equilátero de altura unidad. El desplazamiento es sencillo, se sitúa la aguja fija sobre un vértice y se hace girar hasta hacerla coincidir con uno de los lados del triángulo. A continuación, se desplaza

hasta el otro vértice del lado donde se encuentra y se gira hasta otro de los lados; después se repite el mismo proceso (figura 2): El área de este triángulo es  $S = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0,5774 \text{ u}^2$ .

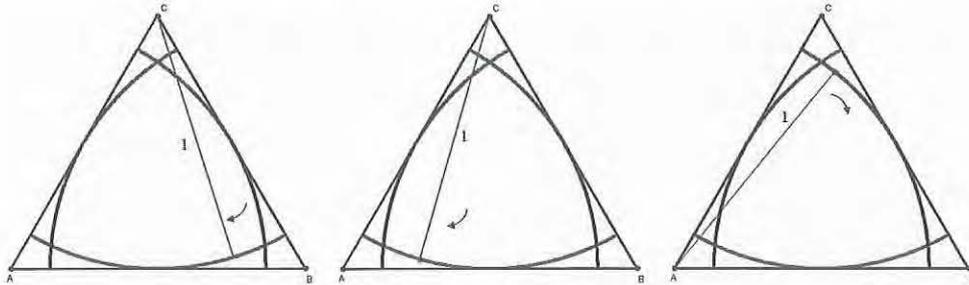


Figura 2. Aguja girando dentro de un triángulo equilátero

Sin embargo, existen figuras con un área aún menor que cumplen la propiedad requerida. Una de ellas es, por ejemplo, la *deltoide*<sup>1</sup> inscrita en un círculo de diámetro  $3/2$ . Se sabe que una recta tangente a un punto cualquiera de esta deltoide atraviesa a ésta por otros dos puntos distantes 1 unidad. Por tanto, para poder realizar el giro de la aguja, uno de los extremos de la misma ha de recorrer la deltoide mientras que la aguja permanece tangente a la curva (figura 3).

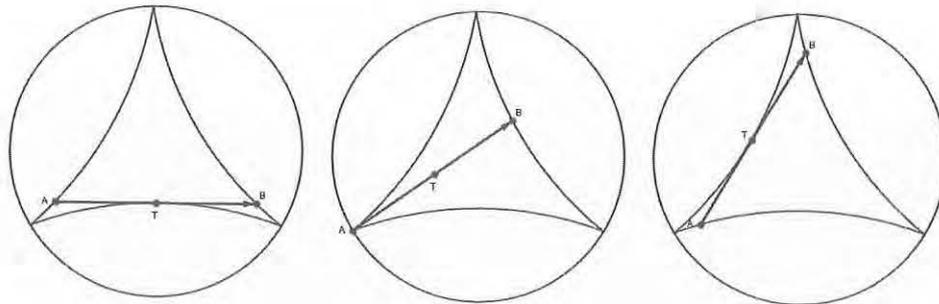


Figura 3. Aguja girando dentro de una deltoide

El área de esta figura es  $S = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \simeq 0,3927 \text{ u}^2$ , que resulta ser la mitad del área del círculo primeramente considerado. Se conjeturó que la deltoide era la figura mínima que podía

<sup>1</sup>Una deltoide es la curva que describe la trayectoria de un punto situado sobre una circunferencia generatriz que rueda por el interior de otra circunferencia directriz de radio triple, sin deslizamiento. Es un caso particular de las *hipocicloides*.

albergar el giro de  $360^\circ$  de una aguja sin salirse del interior de la figura. El problema tuvo gran importancia en la época, especialmente debido a la sencillez de su enunciado y a la complejidad de su solución. En 1925, uno de los matemáticos más relevantes de la época, G. D. Birkhoff, escribiendo sobre problemas no resueltos (en su obra *El origen, la naturaleza y la influencia de la relatividad*), tras hablar sobre el problema de los cuatro colores, añade: “de una simpleza tan intrigante es la cuestión planteada hace unos pocos años por el matemático japonés Kakeya”.

En 1921, un matemático húngaro-danés, Julius Pál (1881-1946), probó que la figura convexa de área mínima en que se podía realizar el giro era el triángulo equilátero de altura unidad. Sin embargo, quedaba abierto el desafío de encontrar la solución para un caso general (considerando también las figuras no convexas). Se conjeturó que no se podría minimizar el área de la deltoide anteriormente descrita. Sin embargo, Besicovitch logró refutar dicha conjetura y, es que, en 1927 publicó un artículo con la solución al problema. Ante la sorpresa de muchos, demostró que dicho giro se puede realizar en una figura de área arbitrariamente pequeña. Es ésta la demostración que procedo a presentar a continuación.

## 2 LA SOLUCIÓN DE BESICOVITCH

Uso esencialmente la referencia [4, p. 222–227]. Esta solución al problema de Kakeya consta de dos partes diferenciadas. En la primera, se expone una construcción geométrica denominada “árbol de Perron”, mientras que en la segunda se completa la demostración con la construcción de las denominadas “uniones de Pàl”.

### 2.1 El árbol de Perron

Oskar Perron, matemático alemán que vivió entre 1880 y 1975, simplificó la resolución original del problema por Besicovitch mediante la construcción que lleva su nombre: el árbol de Perron. El propósito de esta construcción consiste en aportar un modo eficiente de superponer los triángulos resultantes de cierta subdivisión de un triángulo dado de tal modo que el área de la nueva figura obtenida pueda llegar a ser tan pequeña como se quiera. En realidad, fue Isaac Jacob Schoenberg, matemático rumano (1903-1990), quien bautizó a esta construcción bajo el nombre de “árbol de Perron”. Según el propio Besicovitch [1], también podríamos denominarla “árbol de Perron-Schoenberg”. Por claridad daremos a esta construcción la forma de un lema.

**Lema.** *Dado un triángulo  $ABC$  y fijado un número positivo  $\sigma$ , existe un número  $n$  (suficientemente grande) tal que, si se consideran los  $n$  triángulos de igual área  $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$  que se obtienen al dividir la base  $AC$  en  $n$  partes iguales (figura 4), va a ser siempre posible desplazar estos triángulos a lo largo de la base  $AC$  hasta que se solapen de un modo tal, que la figura que conforman todos ellos en su posición final tenga un área más pequeña que el número  $\sigma$ .*

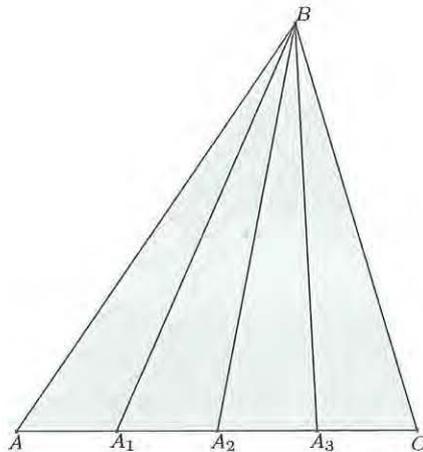


Figura 4. Subdivisión de un triángulo  $ABC$

**Demostración.** Supongamos que se lleva a cabo un desplazamiento de los triángulos  $ABA_1$ ,  $A_1BA_2$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1}BC$  de una manera cualquiera a lo largo de la base  $AC$ . Para determinar el área ocupada por estos triángulos en sus nuevas posiciones, por cada punto de intersección entre los lados de cualquier par de triángulos, trazamos una línea paralela a la base común  $AC$ . De esta manera, habremos dividido el conjunto de triángulos en una serie de triángulos y trapecios de menor tamaño. Tanto el área de un triángulo como el de un trapecio es igual al producto de las longitudes de la altura y de la paralela media a la base (o bases). Por tanto, el área total de todos los trapecios y triángulos que quedan encerrados entre un par de rectas paralelas consecutivas es igual al producto de la anchura de dicha banda y la suma de las longitudes de todos los segmentos delimitados por los triángulos sobre la paralela media de la banda (figura 5).

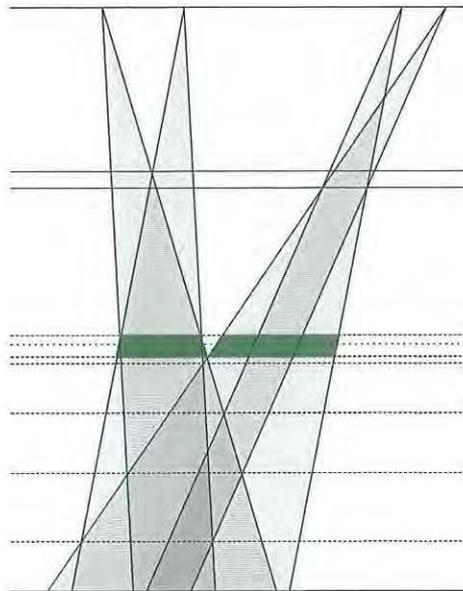


Figura 5.

Luego si podemos asegurar que la longitud total de los segmentos delimitados por los triángulos  $ABA_1$ ,  $A_1BA_2$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1}BC$  desde cada paralela hasta  $AC$  es menor que  $(\sigma/h)$ , donde  $h$  es la altura del triángulo  $ABC$ , el área total ocupada por todos los triángulos será menor que  $\sigma$ . Porque, en este caso, el área de los trozos de triángulos encerrados entre la  $i$ -ésima y la  $(i + 1)$ -ésima paralelas es menor que  $(\sigma/h) \cdot h_i$ , donde  $h_i$  es la distancia entre la  $i$ -ésima y la  $(i + 1)$ -ésima paralelas; el área total cubierta por todos los triángulos es entonces menor que

$$(\sigma/h)(h_1 + h_2 + \dots) = (\sigma/h) \cdot h = \sigma.$$

Ahora suponemos que  $n = 2^m$  donde  $m$  es un entero positivo suficientemente grande, y desplazamos los triángulos  $ABA_1$ ,  $A_1BA_2$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1}BC$  uno tras otro a lo largo de la línea  $AC$

tal como se describe a continuación. Dividimos la altura del triángulo  $ABC$  en  $m + 2$  partes iguales, y por los puntos de división trazamos líneas  $l_0, l_1, \dots, l_m$  paralelas a  $AC$  ( $l_0$  será aquella que quede más cercana al vértice  $B$ ;  $l_1$  es la inmediatamente inferior a  $l_0$ , etc). Cada una de estas líneas corta a los triángulos  $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$  en segmentos de igual longitud (puesto que los triángulos tienen la misma base (figura 6)). Agrupamos nuestros  $2^m$  triángulos en  $2^{m-1}$  parejas:  $\{ABA_1, A_1BA_2\}, \{A_2BA_3, A_3BA_4\}, \dots, \{A_{2^{m-2}}BA_{2^{m-1}}, A_{2^{m-1}}BC\}$  y desplazamos los triángulos de manera que diferentes parejas no se solapen entre sí, pero de tal modo que los triángulos de cada pareja se corten de forma que los segmentos que cada uno de estos dos triángulos delimita en  $l_1$  coincidan.

De esta manera, cada paralela a  $AC$  que está más próxima a  $AC$  que  $l_1$  corta a cada uno de los triángulos desplazados de cada una de estas parejas en dos segmentos que tienen una parte común cuya longitud es igual a la de la intersección de cualquiera de esos dos triángulos con  $l_1$  (véase la figura 7); para cada pareja, ocurre que uno de los lados de uno de los triángulos es paralelo a otro de los lados del otro triángulo. Este paralelismo proviene del desplazamiento horizontal que hemos realizado previamente). Es, por lo tanto, obvio que la línea  $l_1$  corta a los triángulos desplazados en segmentos cuya suma es la mitad de la longitud del segmento en que  $l_1$  cortaba al triángulo  $ABC$  antes del desplazamiento; esto es,

$$(1/2) \cdot 2a/(m + 2) = a/(m + 2),$$

donde  $a$  es la longitud de la base  $AC$  del triángulo  $ABC$ . Los triángulos desplazados ahora delimitan segmentos, en cada línea paralela a  $AC$  y más próxima a  $AC$  que  $l_1$ , cuya longitud total es menor que la longitud de la intersección de dicha línea con el triángulo original en una cantidad  $a/(m + 2)$ .

Ahora agrupamos los  $2^{m-1}$  pares de triángulos en cuaternas, del modo siguiente: emparejamos el primer par con el segundo par, el tercero con el cuarto, y así sucesivamente hasta emparejar el par número  $(2^{m-1} - 1)$  con el par número  $2^{m-1}$ . Para cada cuaterna de triángulos, desplazamos las respectivas parejas de triángulos que la forman hasta que se superpongan los segmentos que la línea  $l_2$  cortaba en cada una de las parejas tras el primer desplazamiento (figura 8).

Es fácil comprobar que tras el primer desplazamiento,  $l_2$  cortaba a cada una de las parejas de triángulos en segmentos de igual longitud. Antes de ningún desplazamiento, cada dos triángulos adyacentes tomados como una unidad, eran intersecados por  $l_2$  en segmentos de igual longitud igual a  $2 \cdot 3/(m + 2) \cdot (a/2^m)$ . Tras el primer desplazamiento, la longitud de todos estos segmentos se ve reducida en la misma cantidad  $2 \cdot a/(m + 2) \cdot (1/2^m)$ . La línea  $l_2$  cortaba a los  $2^{m-1}$  pares de triángulos en segmentos cuya longitud total era igual a

$$\frac{3a}{m + 2} - \frac{a}{m + 2} = \frac{2a}{m + 2}.$$

La línea  $l_2$  corta a los pares desplazados en segmentos cuya longitud total es igual a  $1/2 \cdot 2a/(m + 2) = a/(m + 2)$ . Luego, tras el segundo desplazamiento, cada una de las paralelas más próximas a  $AC$  que  $l_2$ , corta a las cuaternas de triángulos en segmentos cuya longitud total es menor que la longitud total de los segmentos delimitados en esta línea por los primeros  $2^{m-1}$  en una cantidad  $a/(m + 2)$ . (Hay que tener en cuenta que cada dos pares colindantes de triángulos desplazados tienen pares de lados paralelos que provienen de la subdivisión realizada en el triángulo  $ABC$ ).

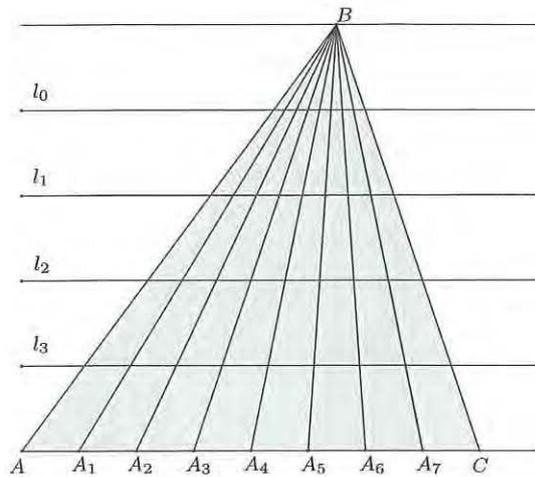


Figura 6. División de la altura en  $m + 2$  partes iguales ( $m = 3$ )

Luego, tras el segundo desplazamiento, en cada línea paralela a  $AC$  y más próxima a ella que  $l_2$ , nuestros  $2^m$  triángulos delimitan segmentos cuya longitud total es menor en una cantidad

$$\frac{a}{m+2} + \frac{a}{m+2} = \frac{2a}{m+2}$$

que la longitud del segmento que esta línea delimitaba en el triángulo original  $ABC$ .

Ahora combinamos las  $2^{m-2}$  cuaternas de triángulos en  $2^{m-3}$  pares de cuaternas y desplazamos las dos cuaternas de cada par de tal forma que se superpongan en el segmento en que eran cortadas por  $l_3$  (figura 9).

Al igual que antes, podemos establecer que tras el segundo desplazamiento,  $l_3$  cortaba a las  $2^{m-2}$  cuaternas en segmentos de igual longitud. Antes del tercer desplazamiento,  $l_3$  corta a las  $2^{m-2}$  cuaternas en segmentos cuya longitud es igual a  $4a/(m+2) - 2a/(m+2) = 2a/(m+2)$ ; y tras el desplazamiento las corta en un segmento de longitud  $1/2 \cdot 2a/(m+2) = a/(m+2)$ . Cada una de las paralelas más próximas a  $AC$  que  $l_3$  corta a las cuaternas desplazadas en segmentos cuya longitud total es menor, en una cantidad  $a/(m+2)$ . Luego en cada línea paralela a  $AC$  y más próxima a ella que  $l_3$ , los  $2^m$  triángulos, agrupados en octuplas, delimitan segmentos cuya longitud total es menor en una cantidad

$$\frac{2a}{m+2} + \frac{a}{m+2} = \frac{3a}{m+2}$$

que el segmento que delimitaba en esta misma línea el triángulo original  $ABC$ . Ahora agrupamos las  $2^{m-3}$  octuplas de triángulos en  $2^{m-4}$  pares de octuplas y desplazamos cada par de octuplas de tal forma que se solapen en el segmento de intersección de cada una de ellas con la línea  $l_4$ . Continuamos este proceso; en el último paso desplazamos dos conjuntos de  $2^{m-1}$  triángulos de tal manera que se solapen en el segmento en que cada una de ellas era cortada por la línea  $l_m$  previamente al desplazamiento. La figura final es el árbol de Perron.

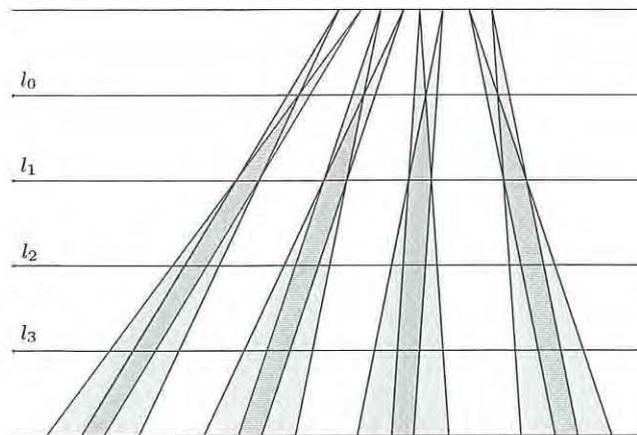


Figura 7. Primer desplazamiento de parejas de triángulos adyacentes

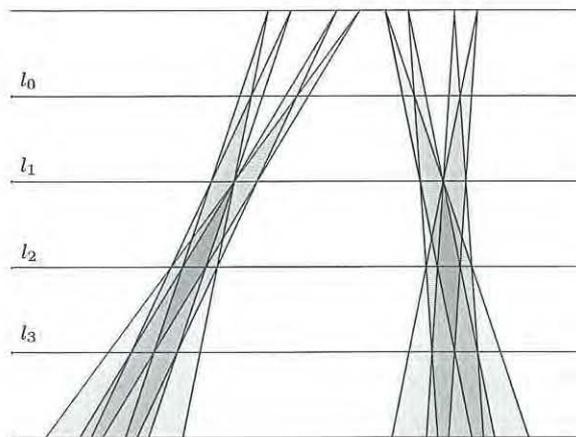


Figura 8. Segundo desplazamiento (cuaternas de triángulos adyacentes)

Ahora se procede a estimar la longitud total de los segmentos que cualquier línea  $l$  paralela a  $AC$  determina en el árbol de Perron. Si  $l$  está más cerca que  $l_1$  de los vértices superiores de los  $2^m$  triángulos, la longitud total de los segmentos que los triángulos delimitan sobre ella es menor que el segmento que delimitaba en ella el triángulo original  $ABC$ . Es decir, esa longitud es menor que  $2a/(m+2)$ .

Si  $l$  se encuentra entre  $l_1$  y  $l_2$ , ésta delimitaba en el triángulo original  $ABC$  un segmento de longitud menor que la longitud  $3a/(m+2)$  del segmento delimitado sobre  $l_2$ . Tras el primer desplazamiento, la suma de segmentos delimitados sobre cualquier paralela inferior a  $l_1$  se ve reducida en una cantidad  $a/(m+2)$  respecto a la longitud del segmento que dicha paralela delimitaba sobre el triángulo original  $ABC$  previamente a ningún desplazamiento. Así pues,

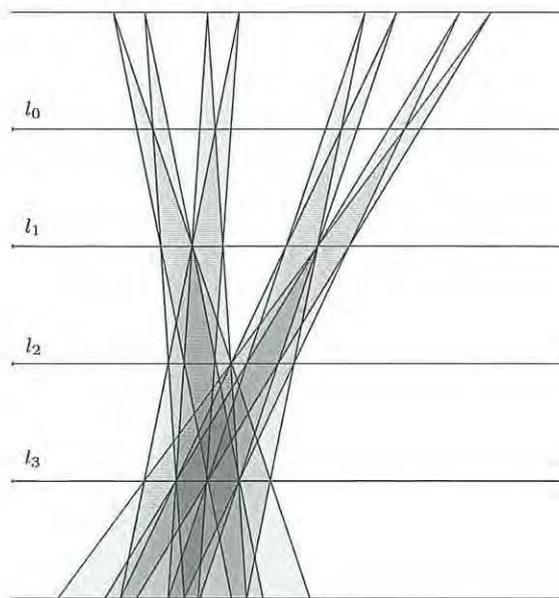


Figura 9. (Tercer) desplazamiento para una óctupla de triángulos adyacentes

tras el primer desplazamiento, la suma de los segmentos delimitados por  $l$  en una misma paralela tiene longitud menor que  $3a/(m+2) - a/(m+2) = 2a/(m+2)$ , y posteriores desplazamientos no provocan un incremento de esta longitud.

Si  $l$  se encuentra entre  $l_2$  y  $l_3$ , inicialmente ésta delimitaba en el triángulo  $ABC$  un segmento de longitud menor que  $4a/(m+2)$  (longitud que delimita en  $l_3$ ). Pero, tras dos desplazamientos, la longitud total de la suma de segmentos que los  $2^m$  triángulos delimitan sobre cada paralela por debajo de  $l_2$  se ve reducida en una longitud  $2a/(m+2)$ . Por tanto, tras el segundo desplazamiento los segmentos delimitados sobre  $l$  tienen una longitud total menor que  $4a/(m+2) - 2a/(m+2) = 2a/(m+2)$  y posteriores desplazamientos no incrementarán esta longitud. De esta manera, demostramos que la longitud del segmento que queda delimitado por los triángulos desplazados sobre la línea  $l$  paralela a  $AC$  no excede  $2a/(m+2)$ . De aquí se sigue que el área total ocupada por los  $2^m$  triángulos tras los desplazamientos completos no excede  $2ah/(m+2) = 4S/(m+2)$ , donde  $S$  es el área del triángulo  $ABC$ . Luego, esta área puede hacerse más pequeña que el número arbitrario  $\sigma$  preasignado (para este propósito tan solo es necesario tomar el número  $m$  suficientemente grande). Esto completa la prueba del lema.

## 2.2 Las uniones de Pàl

Una unión de Pàl es, en esencia, un proceso mediante el cual se consigue superar la dificultad de mantener la continuidad del desplazamiento del segmento unitario a través del árbol de Perron. Es a Julius Pàl a quien debemos la idea de estas uniones.

Haciendo uso del lema podemos construir fácilmente una figura cuya área es menor que un número  $\sigma$  arbitrariamente pequeño, y dentro de la cual es posible girar  $360^\circ$  un segmento de longitud unidad. Sea  $ABC$  un triángulo cualquiera cuyo radio inscrito sea 1. Unimos el centro  $O$  del círculo inscrito con los vértices del triángulo y consideramos los triángulos  $AOB$ ,  $BOC$  y  $COA$ . De acuerdo con el lema podemos descomponer cada uno de estos tres triángulos en subtriángulos por medio de segmentos que parten de  $O$  (figura 10) y, posteriormente, desplazar esos subtriángulos de tal forma que el área total que ocupen al final todos los subtriángulos sea arbitrariamente pequeña. Llevamos a cabo esta construcción de una manera tal que el área total final ocupada por todos los subtriángulos sea menor o igual que  $\sigma/2$ . Por el interior de cada uno de los triángulos  $AOB$ ,  $BOC$  y  $COA$  se puede girar un segmento de longitud 1 un ángulo igual a  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle BOC$  y  $\sphericalangle COA$  respectivamente, como vamos a ver:

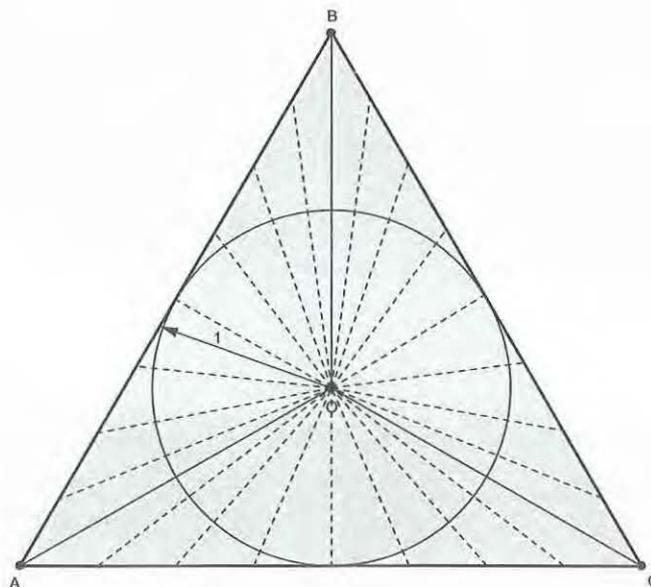


Figura 10. Momento inicial en la resolución del problema de Kakeya

Consideramos dos triángulos,  $X_1OX_2$  y  $X_3O'X_4$ , de la descomposición del triángulo  $ABC$  que eran adyacentes previamente a su desplazamiento; esto es, que poseían un lado común (para una mejor visualización, en la figura 11 estos triángulos se muestran desplazados de forma que no se solapan, cosa que en realidad no ocurre). Aquí los lados  $OX_2$  y  $O'X_3$ , que resultan de la traslación de ese lado común, son paralelos entre sí. Dibujamos en nuestros triángulos las líneas  $OY$  y  $O'Y'$ , que forman pequeños ángulos con los lados  $OX_2$  y  $O'X_3$  respectivamente, y

prolongamos estos lados hasta que se cortan en un punto  $M$ . En el punto  $M$  construimos un sector circular  $MZZ'$  de radio 1 con ángulo central  $OMO'$  (figura 11).

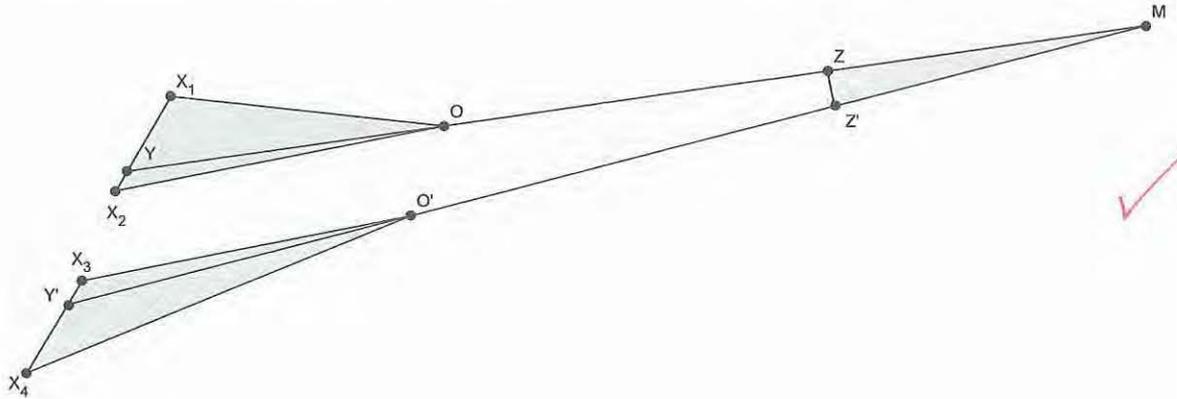


Figura 11. Una unión de Pál

Con centro en  $O$  podemos girar un segmento de longitud 1 desde una posición sobre la línea  $OX_1$  hasta una posición sobre la línea  $OY$ , después desplazarlo sobre la línea  $YM$  hasta la posición  $ZM$ , rotarlo de nuevo hasta la posición  $Z'M$ , desplazarlo sobre la línea  $MY'$  de tal forma que quede en el interior del triángulo  $X_3O'X_4$ , y finalmente girarlo con centro  $O'$  hasta la posición  $O'X_4$ .

Si ahora llevamos a cabo este proceso descrito para cada par de subtriángulos adyacentes en que hemos dividido el triángulo  $ABC$ , así, de esta manera podremos girar  $360^\circ$  un segmento de longitud 1 dentro de la figura formada por todos los triángulos en que hemos dividido el triángulo  $ABC$ , por todos los segmentos de la forma  $OM$  y  $OM'$  y por todos los sectores de la forma  $ZMZ'$ . El área de cada sector circular añadido a la figura puede ser arbitrariamente pequeña (pues podemos hacer arbitrariamente pequeño el ángulo del sector tomando el punto  $M$  muy alejado). Los segmentos añadidos que también han sido considerados como parte de la figura tienen área cero (podríamos reemplazar esos segmentos por bandas de anchura arbitrariamente pequeña).

Si los triángulos (que surgen a partir de la descomposición del triángulo  $ABC$ ) ocupan un área menor que  $\sigma/2$  en su nueva posición tras los desplazamientos (esto es posible por el lema, pues  $\sigma$  puede ser arbitrariamente pequeño), y se hace que los segmentos y sectores (o bien bandas y sectores) tengan área menor que  $\sigma/2$ , se obtiene una figura de área menor que  $\sigma$  en la que se puede girar  $360^\circ$  un segmento de longitud unidad. Ésta es en esencia la solución de Besicovitch al problema de la aguja de Kakeya.

### 3 CONCLUSIÓN

Mediante la presente monografía he tratado de exponer el trabajo de investigación que he llevado a cabo para informar acerca del problema de la aguja de Kakeya y su solución por Besicovitch. Personalmente, me ha parecido un tema muy interesante desde el primer momento. Y, es que, considero este problema altamente llamativo debido a su enorme sencillez de planteamiento. Además, es un problema que en un primer contacto parece contradecir plenamente a nuestra intuición. Para la mente humana es prácticamente inconcebible que una aguja de, digamos, 10 kilómetros de largo (siempre sin grosor), por poner un ejemplo, pueda girar  $360^\circ$  sin salirse de una figura de área más pequeña que la que tiene un punto trazado con un lapicero sobre el papel.

Es en problemas como éste donde realmente aflora la belleza de la Matemática, que es capaz de demostrar con total verosimilitud ciertas proposiciones cuya veracidad no podríamos probar de ninguna otra manera. Por otra parte, considero que la realización de la presente monografía me ha aportado mucho en el plano personal, en cuanto que me ha hecho explorar nuevos caminos que desconocía o, al menos, respecto a los cuales no había tenido la ocasión de tener un contacto tan cercano. Me refiero a, por ejemplo, la aplicación de un planteamiento inductivo en un terreno puramente geométrico, o a la aplicación de estrategias tan elegantes como la empleada en las uniones de Pál, que permiten resolver problemas nada sencillos, como mantener la continuidad del desplazamiento de la aguja en conjuntos de configuración geométrica tan complicada como los árboles de Perron.

*Excelente monografía, muy bien presentada.*



## Referencias bibliográficas

- [1] BESICOVITCH, A. S., The Kakeya Problem, *The American Mathematical Monthly*, **70**(1963), pp. 697–706.
- [2] DUOANDIKOETXEA, J., *Cómo mover una aguja en un conjunto plano pequeño*, Universidad del País Vasco, [en línea], disponible en web: ([http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com\\_docman&task=doc\\_details&gid=466&Itemid=75](http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=466&Itemid=75))
- [3] OGILVY, C. STANLEY, *Excursions in Geometry*, Dover, New York, 1990, pp. 147–153.
- [4] YAGLOM, I. M. Y BOLTYANSKIĬ, V. G., *Convex Figures*, Library of the Mathematical Circle-Volume 4, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961, pp. 61 y 222–227.