



Les candidats doivent remplir cette page puis remettre cette chemise accompagnée de la version finale de leur mémoire à leur superviseur.

Numéro de session du candidat

Nom du candidat

Code de l'établissement

Nom de l'établissement

Sessions d'examens (mai ou novembre)

MAI

Année

2013

Matière du Programme du diplôme dans laquelle ce mémoire est inscrit : MATHÉMATIQUES

(Dans le cas d'un mémoire de langue, précisez la langue et s'il s'agit du groupe 1 ou 2.)

Titre du mémoire : Calcul de l'aire algébrique sous une fonction  
représentée dans un plan hyperbolique à courbure  
constante

### Déclaration du candidat

*Cette déclaration doit être signée par le candidat, sans quoi aucune note finale ne pourra être attribuée.*

Le mémoire ci-joint est le fruit de mon travail personnel (mis à part les conseils permis par le Baccalauréat International que j'ai pu recevoir).

J'ai signalé tous les emprunts d'idées, d'éléments graphiques ou de paroles, qu'ils aient été communiqués originellement par écrit, visuellement ou oralement.

Je suis conscient que la longueur maximale fixée pour les mémoires est de 4 000 mots et que les examinateurs ne sont pas tenus de lire au-delà de cette limite.

Ceci est la version finale de mon mémoire.

Signature du candidat :

Date :

## Rapport et déclaration du superviseur.

*Le superviseur doit remplir ce rapport, signer la déclaration et remettre au coordonnateur du Programme du diplôme la version définitive du mémoire dans la présente chemise.*

Nom du superviseur [en CAPITALES]

*Le cas échéant, veuillez décrire le travail du candidat, le contexte dans lequel il a entrepris sa recherche, les difficultés rencontrées et sa façon de les surmonter (voir les pages 13 et 14 du guide Le mémoire). L'entretien de conclusion (ou soutenance) pourra s'avérer utile pour cette tâche. Les remarques du superviseur peuvent aider l'examineur à attribuer un niveau pour le critère K (évaluation globale). Ne faites aucun commentaire sur les circonstances personnelles défavorables qui auraient pu affecter le candidat. Si le temps passé avec le candidat est égal à zéro, vous devrez l'expliquer et indiquer comment il vous a été possible de vérifier que le mémoire était bien le fruit du travail du candidat en question. Vous pouvez joindre une feuille supplémentaire si l'espace fourni ci-après est insuffisant.*

a produit un mémoire d'une qualité exceptionnelle et ce, de façon très autonome. Quelques brèves rencontres avec lui ont été nécessaires, simplement dans le but de faire le point sur ces avancements par rapport à l'atteinte de son objectif, de lui apporter de l'aide technique sur l'utilisation de l'éditeur de texte LaTeX (auquel s'est de lui-même initié dans le cadre de ce travail), ou encore afin de le conseiller sur la façon de rédiger un texte sur un sujet mathématique. Lors de ces rencontres, j'ai pu constater que travaillait de façon régulière et soutenue sur son mémoire, que ses sources étaient de bons ouvrages de référence réellement utiles à son travail et qu'il maîtrisait très bien le sujet choisi, sujet qu'il a traité à un niveau remarquablement élevé pour un étudiant de niveau pré-universitaire. Bref, il s'agit du meilleur mémoire que j'ai eu l'occasion de superviser.

*Cette déclaration doit être signée par le superviseur, sans quoi aucune note finale ne pourra être attribuée.*

J'ai lu la version finale du mémoire qui sera envoyée à l'examineur.

À ma connaissance, le mémoire constitue le travail authentique du candidat.

J'ai consacré  heures d'encadrement au candidat pour ce mémoire.

Signature du superviseur :

Date :

## Formulaire d'évaluation (réservé à l'examinateur)

Critères d'évaluation	Niveau					
	L'examinateur 1	Max.	L'examinateur 2	Max.	L'examinateur 3	
A Question de recherche	2	2		2		
B Introduction	2	2		2		
C Recherche	4	4		4		
D Connaissance et compréhension du sujet étudié	4	4		4		
E Raisonnement	4	4		4		
F Utilisation des compétences d'analyse et d'évaluation adaptées à la matière	4	4		4		
G Utilisation d'un langage adapté à la matière	4	4		4		
H Conclusion	2	2		2		
I Présentation formelle	4	4		4		
J Résumé	2	2		2		
K Évaluation globale	4	4		4		
	Total sur 36	36				

---

Mémoire

Calcul de l'aire algébrique sous une fonction  
représentée dans un plan hyperbolique à courbure constante  
Par

## Résumé

Ce mémoire présente une technique permettant de trouver l'aire sous la courbe d'une fonction dans un espace hyperbolique à courbure constante. Cette technique devait remplacer l'intégration de la fonction, qui permet de trouver de telles valeurs dans l'espace euclidien. Dans ce travail, nous présentons l'espace hyperbolique lui-même avec les caractéristiques importantes pour la résolution de notre question de recherche, ainsi que le système de coordonnées utilisé pour décrire les fonctions. Nous faisons aussi la présentation des modèles de géométrie hyperbolique imaginés par Klein et Poincaré, que nous utiliserons pour transposer nos fonctions du plan hyperbolique à euclidien, afin de pouvoir utiliser les outils de la géométrie analytique plus nombreux de cette dernière géométrie. Nous avons pu déduire des équations pour transposer une fonction quelconque vers les modèles de Klein, puis de Poincaré. Grâce à ces équations, nous pouvions travailler avec des courbes dans l'espace euclidien. Comme le modèle de Poincaré est conforme, et comme nous avons besoin des angles pour déterminer les aires en géométrie hyperbolique, nous avons trouvé la solution à notre problème en considérant notre courbe comme une ligne brisée ayant un nombre de sommets tendant vers l'infini. Nous avons ainsi établi que l'équation de l'aire algébrique sous une courbe vaut :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \left( -\arctan\left(p\left(a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right)\right) + \arctan\left(p\left(a + i\frac{b-a}{n}, a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\right) \right) \\ - \pi - \arctan\left(p\left(a, a + \frac{b-a}{n}\right)\right) + \arctan\left(\frac{1 - (k_x(a))^2 + \sqrt{1 - (k_x(a))^2 - (k_y(a))^2}}{k_x(a)k_y(a)}\right) \\ - \arctan\left(\frac{1 - (k_x(b))^2 + \sqrt{1 - (k_x(b))^2 - (k_y(b))^2}}{k_x(b)k_y(b)}\right) + \arctan\left(p\left(b, b - \frac{b-a}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Nous devons cependant ajuster ce résultat en ajoutant ou soustrayant des multiples de  $\frac{\pi}{2}$ , selon l'angle que forme les deux sommets aux extrémités de la fonction avec les droites verticales et l'angle que forme ces mêmes droites avec l'axe des abscisses.

## Remerciements

Nous tenons à remercier \_\_\_\_\_, professeure de mathématiques au collège \_\_\_\_\_, pour ses nombreux conseils et son attention particulière lors de la révision des versions préliminaires, essentiels à la réalisation de ce travail.

# Table des matières

1	Introduction	4
2	Notions de base et définitions	4
2.1	Géométrie hyperbolique . . . . .	4
2.2	Représentations du plan hyperbolique . . . . .	6
2.3	Fonctions et géométrie analytique . . . . .	8
2.4	Aires en géométrie hyperbolique . . . . .	10
3	Point de départ de notre méthode : Établissement d'une relation entre les coordonnées hyperboliques et euclidiennes	10
3.1	Explication de la démarche . . . . .	10
3.2	Traduction de la fonction vers sa représentation graphique dans le disque de Klein	10
3.3	Traduction de la représentation du disque de Klein vers le disque de Poincaré . .	15
4	Suite de la démarche : D'une courbe à un polygone	17
4.1	Relier deux points dans l'espace . . . . .	17
4.2	Déterminer l'angle à un sommet . . . . .	22
4.3	Boucler la boucle . . . . .	23
5	Aboutissement de la démarche : Calculer l'aire sous la courbe	24
6	Limites de notre résultat	27
7	Conclusion	28
8	Bibliographie	29
9	Annexe	30
9.1	Symboles et notations utilisées . . . . .	30

# 1 Introduction

L'intégration d'une fonction permet de trouver l'aire algébrique sous cette fonction, lorsque celle-ci est représentée dans le plan cartésien euclidien.<sup>1</sup> Elle permet ainsi de calculer des aires et des volumes de façon précise, même si l'objet en question n'est pas régulier. Ceci est possible évidemment si l'on est capable de traduire les contours de l'objet en une fonction mathématique. Cette technique devient plutôt pratique lorsque l'on veut connaître l'aire ou le volume d'objets de très grande dimension ou d'objets purement mathématiques, car nous ne pouvons utiliser d'instrument conventionnel pour les mesurer. Cependant, l'intégration d'une fonction dans un plan hyperbolique, soit un plan à courbure négative, ne donne pas le même résultat. Nous ne pouvons pas utiliser les mêmes techniques d'intégration pour déterminer l'aire d'objets dans un espace hyperbolique.

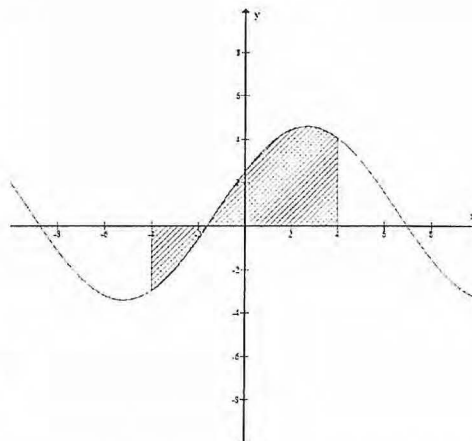


FIGURE 1 – On peut calculer des aires à l'aire de l'intégration.

Ce mémoire a donc pour but de trouver une formule algébrique pour déterminer l'aire sous un intervalle donné d'une courbe dans un plan hyperbolique à courbure constante. Grâce à cette méthode, le calcul d'aires et de volumes sera tout aussi facile dans un espace hyperbolique que dans un espace euclidien.

Nous commencerons la présentation de notre méthode par un court rappel des caractéristiques de l'espace hyperbolique importantes dans la suite de ce mémoire, que nous supposons connues du lecteur. Puis, nous montrerons les modèles de géométrie hyperbolique sur lesquels nous nous baserons, soit les disques de Klein et de Poincaré. Nous définirons ensuite nos fonctions, et nous résoudrons notre problème grâce à la géométrie analytique euclidienne.

## 2 Notions de base et définitions

Cette section se veut simplement un rappel des caractéristiques importantes de la géométrie hyperbolique que nous utiliserons dans notre démarche.

### 2.1 Géométrie hyperbolique

Un espace hyperbolique est un espace non-euclidien, soit un espace ne respectant pas le 5<sup>e</sup> postulat d'Euclide :

---

1. On désigne par « aire algébrique sous une fonction » l'aire délimitée par la fonction, l'axe des abscisses et les deux droites verticales perpendiculaires à l'axe des abscisses et reliant celui-ci aux deux extrémités de l'intervalle à étudier. Si la fonction tombe sous l'axe des abscisses, une aire négative est attribuée à cette partie de la fonction.



Si deux droites sont coupées par une droite transversale de sorte que pour les deux angles intérieurs sur un côté de cette droite transversale, l'un de ces angles est inférieur au supplément de l'autre angle, alors les deux droites se rencontrent de ce côté de la droite transversale.<sup>2</sup>

Cela revient à dire qu'en géométrie euclidienne, par un point extérieur à une droite initiale, il existe exactement une droite passant par ce point et parallèle à la droite initiale. Notons que deux droites coplanaires sont parallèles si et seulement si elles n'ont aucune intersection. En géométrie hyperbolique, dans la situation énoncée par Euclide, les deux droites pourraient ne jamais se croiser même si la somme des angles d'un côté de la droite sécante est de moins de deux angles droits. Autrement dit, par un point extérieur à une droite initiale, il passe plus d'une droite parallèle à la droite initiale. Ces parallèles ne sont pas équidistantes de la droite initiale, contrairement à la géométrie euclidienne, et il n'existe qu'une droite dans l'espace qui est perpendiculaire aux deux parallèles simultanément. Dans le cas où il ne passerait aucune parallèle à une droite par un point extérieur à cette droite, nous qualifierions cette géométrie d'elliptique. Celle-ci présente des propriétés similaires à la géométrie hyperbolique, mais nous ne traiterons pas de cette géométrie dans ce travail.

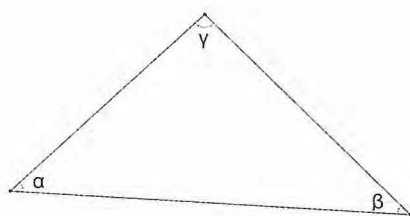


FIGURE 2 – En géométrie hyperbolique,  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$  radians.

Le plan hyperbolique peut alors apparaître comme un plan plus dense que le plan euclidien. Si l'on essayait d'écraser un plan hyperbolique souple sur un plan euclidien, le plan hyperbolique se replierait sur lui-même. C'est pour cette raison que deux droites peuvent sembler se rapprocher pendant un certain temps sans pour autant se croiser. Cette particularité implique une seconde, très importante dans le développement de notre méthode : la somme des angles d'un triangle sera toujours inférieure à  $\pi$  radians. En effet, si la somme des angles était égale à  $\pi$  radians, nous pourrions alors démontrer le postulat des parallèles d'Euclide. Il en va de même pour les polygones.

Puisqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini de triangles, la somme des angles de n'importe quel polygone est inférieure à  $\pi \times (n - 2)$ , où  $n$  représente le nombre de côtés du polygone, c'est-à-dire à  $\pi$  fois le nombre de triangles qu'il contient.

La dernière caractéristique que nous voulons aborder découle de la limite de la somme des angles. En géométrie hyperbolique, il n'existe aucun quadrilatère ayant 4 angles droits, c'est-à-dire aucun rectangle. En effet, la somme des angles d'un rectangle étant  $2\pi$ , ceci contredirait ce que nous venons tout juste de dire. Nous introduisons donc une autre figure qui remplacera en quelque sorte le rectangle : le quadrilatère de Lambert. Celui-ci est un quadrilatère ayant 3 angles droits et le 4<sup>e</sup> angle aigu. Les deux côtés bornés de deux angles droits sont plus petits

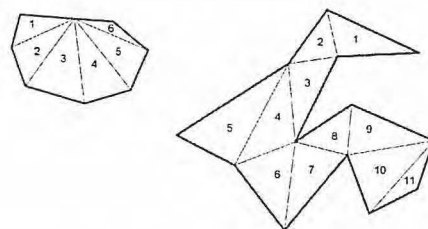


FIGURE 3 – Peu importe le polygone, il sera toujours possible de le décomposer en triangles.

2. Traduit de Greenberg, Marvin Jay. *Euclidean and Non-euclidean Geometries*, p.173

que leur côté opposés. Nous verrons plus tard la relation entre ces côtés.

## 2.2 Représentations du plan hyperbolique

Alors que nous pouvons fournir un exemple de surface à géométrie elliptique dont le rayon de courbure est constant dans l'espace tridimensionnel euclidien, soit la sphère, ce n'est pas le cas pour une surface à géométrie hyperbolique. Des modèles ont donc été développés pour représenter un plan hyperbolique dans un plan euclidien.<sup>3</sup>

Nous verrons deux modèles. Le premier, celui de Klein, se distingue notamment par quatre caractéristiques.

1. Le plan hyperbolique est représenté en entier dans un disque dont on a exclu la frontière.
2. Les droites du plan hyperbolique restent des droites dans ce modèle.
3. Les angles de ce modèle ne sont pas conformes aux angles du plan hyperbolique.
4. Si une droite est représentée dans le modèle comme un diamètre du disque, alors les droites perpendiculaires à cette droite dans le plan hyperbolique le sont aussi dans ce modèle.

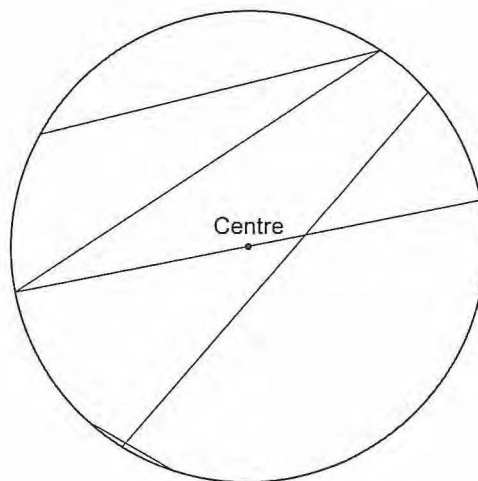


FIGURE 4 – On peut voir dans ce modèle plusieurs lignes sécantes entre elles, mais parallèles à une même ligne.

---

3. Nous parlerons de droite hyperbolique, ou réelle, pour désigner la droite elle-même, dans le plan hyperbolique. Lorsque nous ferons allusion à une droite euclidienne, nous désignerons par là la représentation de la droite hyperbolique dans l'un ou l'autre de nos modèles. Nous utiliserons la même distinction pour les distances.

Le second, de Poincaré, a les caractéristiques suivantes.

1. Le plan hyperbolique est représenté dans le même disque moins le cercle frontière.
2. Les droites sont représentées comme des diamètres du disque ou des arcs de cercles orthogonaux au cercle frontière, c'est-à-dire qui coupent celui-ci à angle droit.
3. Les angles sont conformes. Ils sont les mêmes dans le plan hyperbolique que dans le modèle.

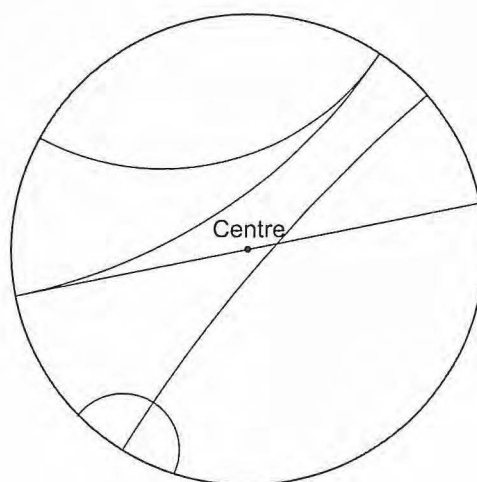


FIGURE 5 – Les mêmes lignes que le modèle précédent sont représentées, ici dans le modèle de Poincaré.

Ces deux modèles sont intimement liés. L'intersection des droites hyperboliques sur le cercle frontière est la même dans les deux modèles. On appelle ces intersections « points à l'infini ». Donc, si l'on connaît une droite du modèle de Klein, il suffit de trouver les points à l'infini de cette droite qui se trouvent sur le cercle frontière, et de tracer l'arc de cercle orthogonal à ce cercle et passant par les mêmes points pour trouver la droite équivalente du modèle de Poincaré. Évidemment, la procédure inverse fonctionne aussi. Ainsi, un diamètre du disque représente la même droite dans les deux modèles. Donc, chaque point, lorsque l'on passe d'un modèle à l'autre, reste sur le même diamètre qu'à l'origine.

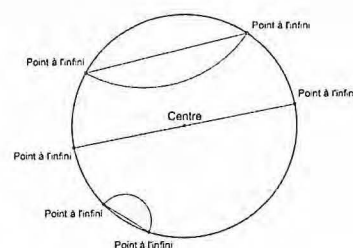


FIGURE 6 – L'espace hyperbolique selon les modèles de Klein et Poincaré.

Aucun des deux modèles ne conserve les longueurs, puisque les deux modèles représentent des plans infinis sur une surface finie. On doit donc définir la fonction qui permettra de retrouver

la distance entre les deux points  $A$  et  $B$ . Celle-ci utilisera la notion de rapport anharmonique, ou birapport. On définit le rapport anharmonique  $(AB | CD)$  comme le rapport  $\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$ , ou encore  $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ . On note  $\overline{AB}$  la distance euclidienne sur une droite ou un arc de cercle entre les points  $A$  et  $B$ .

Pour le modèle de Klein donc, la fonction distance est la suivante :

$$d_k(AB) = \frac{1}{2} | \ln(AB | CD) | \quad (1)$$

alors que le modèle de Poincaré donne la relation suivante

$$d_p(AB) = | \ln(AB | CD) | \quad (2)$$

où  $d(AB)$  représente la distance hyperbolique, selon le modèle de Klein ou Poincaré<sup>4</sup>, et les points  $C$  et  $D$  sont les points à l'infini de la droite  $\overline{AB}$ , c'est-à-dire l'intersection entre la droite du modèle utilisé et la frontière du disque du modèle<sup>5</sup>. Il est important de noter que nous pouvons échanger les points  $C$  et  $D$  entre eux sans changer la valeur de  $d(AB)$  grâce à la valeur absolue.

### 2.3 Fonctions et géométrie analytique

Maintenant que nous avons défini le plan hyperbolique et les représentations que nous allons utiliser, définissons nos objets d'étude. Nous voulons représenter des fonctions dans le plan hyperbolique. Pour cela, il nous faut un système de coordonnées. Mais puisque les rectangles n'existent pas, le système cartésien doit être attentivement défini.

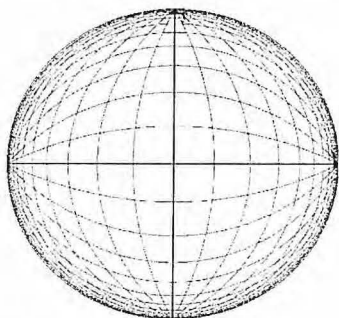


FIGURE 7 – Notons bien que les courbes représentées ne sont pas des droites, mais bien des courbes dont l'abscisse ou l'ordonnée est la même. Chaque courbe est espacée de 0,5 unité.

Soit un point quelconque du plan hyperbolique, ses coordonnées  $(x, y)$  représentent la plus courte distance algébrique de ce point respectivement à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses, c'est-à-dire la longueur du segment reliant le point à l'axe et perpendiculaire à l'axe. Nous disons distance « algébrique », car si le point est du côté négatif de l'axe, un signe «-» sera attribuée à la distance. Grâce à ce système, toutes les paires de coordonnées correspondent à un point, et tout point peut être traduit en coordonnées.

Nous sommes maintenant prêts à observer quelques fonctions, mais tout d'abord, faisons quelques simplifications qui ne restreignent pas notre problème, mais qui simplifient grandement nos calculs.

(A) Le rayon de courbure de notre plan sera constant, et nos unités de longueur seront égales à ce rayon de courbure. En effet, bien qu'il n'existe aucune mesure intrinsèque de longueur en

4. Nous attribuerons systématiquement l'indice  $k$  aux variables relatives au modèle de Klein, et l'indice  $p$  aux variables relatives au modèle de Poincaré.

5. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Nikolai Efimov, *Géométrie supérieure*, Moscou, Mir, 1981, p. 514-517, pour la preuve de ces lois.

géométrie euclidienne, c'est le cas en géométrie hyperbolique et elliptique<sup>6</sup>. Cette mesure est donnée par ce que l'on appelle le rayon de courbure. Le choix de l'unité de mesure ne changeant pas les objets que nous étudions, mais simplement les ordres de grandeur de ces objets, nous pouvons choisir cette unité simplificatrice.

- (B) Nous représenterons les disques de Klein et Poincaré dans le plan cartésien comme un disque de rayon 1, dont le centre est à l'origine du plan cartésien. Nous positionnerons aussi nos axes hyperboliques sur les axes cartésiens, encore une fois dans le but de simplifier les calculs. Puisque nous définissons notre plan cartésien ainsi, ces simplifications ne changent toujours pas les objets ni les mesures que nous étudions.

Voici quelques fonctions, selon la représentation de Klein et de Poincaré.

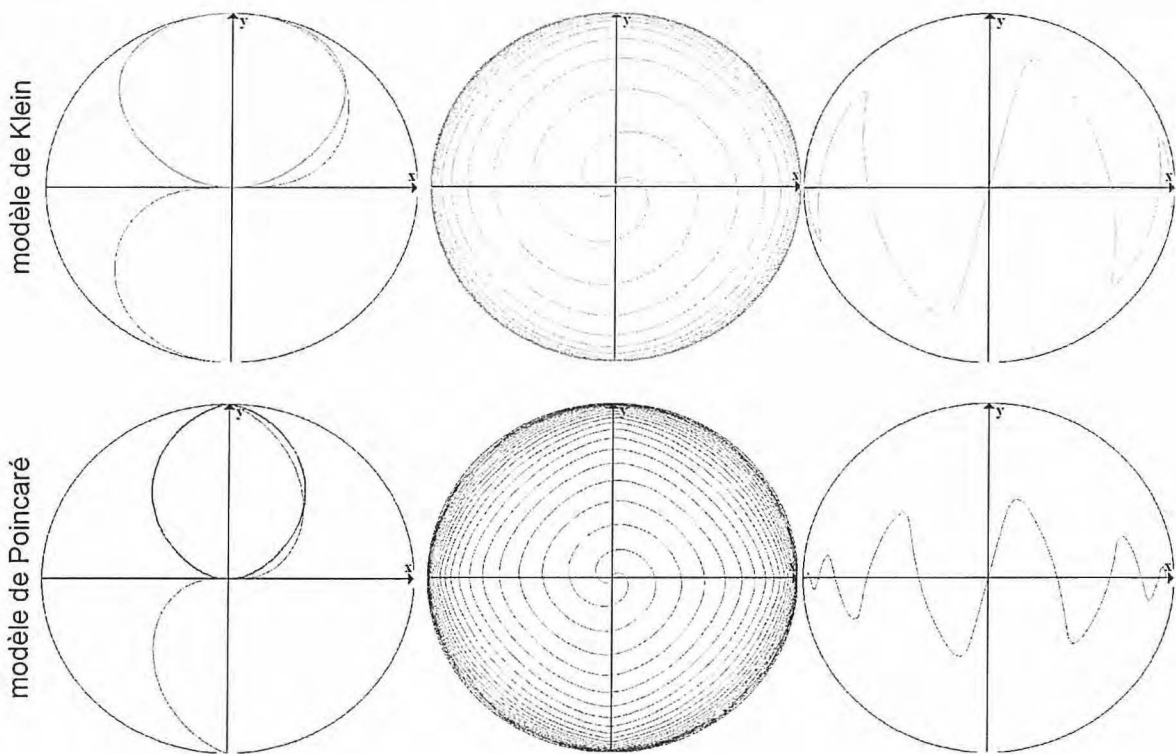


FIGURE 8 – Différentes fonctions représentées dans les disques de Klein et de Poincaré.

6. En géométrie euclidienne, il existe cependant une unité de mesure intrinsèque pour les angles, le radian.

## 2.4 Aires en géométrie hyperbolique

Cette dernière sous-section a pour but de définir le calcul de l'aire en géométrie analytique.

Comme nous l'avons dit, la somme des angles d'un polygone sera toujours inférieure à celle d'un polygone ayant le même nombre de côtés en géométrie euclidienne, soit  $\pi \times (n - 2)$ , où  $n$  est le nombre de côtés du polygone. Or, la différence entre la somme des angles du polygone et cette valeur maximale est appelée le déficit. Il équivaut exactement à l'aire du polygone, en autant que nous utilisons l'unité de mesure appropriée, ce que nous ferons dans notre démarche en prenant le rayon de courbure comme unité de mesure.<sup>7</sup>

## 3 Point de départ de notre méthode : Établissement d'une relation entre les coordonnées hyperboliques et euclidiennes

### 3.1 Explication de la démarche

Nous voilà prêts à commencer cette résolution. Pour trouver l'aire sous une fonction quelconque, nous allons procéder comme suit.

1. Nous devons traduire la fonction par des coordonnées cartésiennes, selon le modèle de Klein.
2. Grâce à ce résultat, nous pourrons traduire la fonction en coordonnées cartésiennes selon le modèle de Poincaré.
3. Par la suite, nous traiterons notre fonction comme un polygone, dont le nombre de côtés tendra vers l'infini
4. Nous devons alors déterminer une façon pour trouver la droite reliant deux points quelconques dans le modèle de Poincaré.
5. Une fois ces droites trouvées, nous pourrons trouver l'angle à chaque sommet du polygone.
6. Finalement, nous pourrons faire la sommation de ces valeurs, trouver le déficit, et ainsi déterminer l'aire recherchée.
7. Une fois le problème résolu, nous discuterons des limites de ces résultats.

### 3.2 Traduction de la fonction vers sa représentation graphique dans le disque de Klein

Nous cherchons à trouver, pour chaque point  $P(x, y)$ , les coordonnées du modèle de Klein pour ce point, que nous nommons  $P_k(x_k, y_k)$ .

---

7. Nous ne ferons pas la preuve de ce théorème ici, car elle n'est pas pertinente à notre méthode. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Nikolai Efimov, *Géométrie supérieure*, Moscou, Mir, 1981, p. 156-159

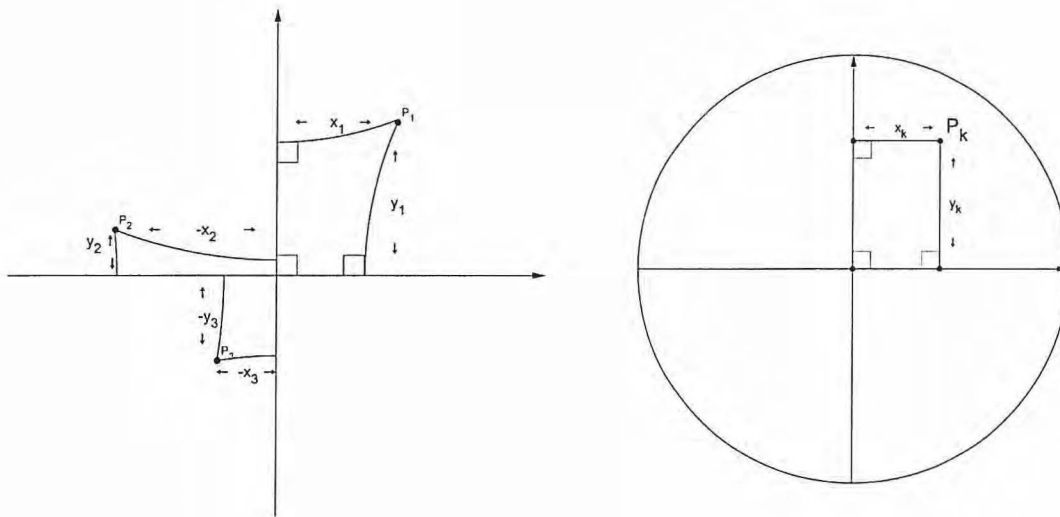


FIGURE 9 – Chaque point peut être représenté par deux coordonnées, et chaque paire de coordonnées correspondent à un point unique et différent du plan.

Chaque point  $P(x, y)$  de la fonction peut être représenté comme le sommet de l'angle aigu d'un quadrilatère de Lambert. La valeur de l'abscisse est alors la longueur du plus long côté horizontal du quadrilatère, et la valeur de l'ordonnée est la valeur du plus long côté vertical du quadrilatère. Le sommet opposé au point étudié est l'origine du plan, et les côtés les plus courts représentent les axes des abscisses et des ordonnées.

Dans le modèle de Klein, ce quadrilatère apparaît comme un rectangle dont un sommet est au centre du disque, deux côtés sont sur les axes et le sommet de l'angle aigu est donné par le point  $P_k$ . Nous savons que ce rectangle est en réalité un quadrilatère de Lambert, car trois de ses angles sont situés sur les axes. Or, comme nous le savons, une droite perpendiculaire à un diamètre du disque dans le plan cartésien l'est en réalité dans le plan hyperbolique. Puisque nous avons maintenant un rectangle, les coordonnées cartésiennes du point  $P_k$  sont données par la longueur des côtés les plus longs du quadrilatère de Lambert.

Malheureusement, pour déterminer ces longueurs, il nous faut connaître les points d'intersection des droites avec la frontière du disque, ce qui engendrerait des calculs plus complexes. Pour contourner ce problème, nous calculerons plutôt la longueur des côtés du rectangle qui sont sur les axes. Comme nous connaissons les coordonnées des points d'intersections des axes avec la frontière du disque, et comme la longueur euclidienne des côtés opposés d'un rectangle est égale, ce problème est alors réglé.

La relation entre les côtés des quadrilatères de Lambert est la suivante : soit  $a$  et  $b$ , la longueur des côtés de l'angle aigu, et  $c$ , la longueur du côté opposé à  $a$ , alors nous pouvons

établir la relation

$$\sinh a = \sinh c \cosh b$$

où  $\sinh$  est la fonction sinus hyperbolique et  $\cosh$ , le cosinus hyperbolique<sup>8</sup>. Nous utiliserons aussi l'argument du sinus hyperbolique, traduit par  $\operatorname{argsh}$ .

Remplaçons maintenant  $a$  par  $x$  et  $b$  par  $y$ , soit les coordonnées du point  $P$ . La valeur  $c$  représente la distance hyperbolique entre l'origine et la projection du point  $P$  sur l'axe des abscisses. Nous notons le point qui est cette projection  $X_0$  et la valeur de cette distance  $x_0$ . Nous avons donc

$$\sinh x = \sinh x_0 \cosh y$$

d'où

$$x_0 = \operatorname{argsh}\left(\frac{\sinh x}{\cosh y}\right) \quad (3)$$

Si nous changeons  $x$  pour  $y$  et vice versa, alors  $c$  représente la distance hyperbolique entre l'origine et la projection du point  $P$  sur l'axe des ordonnées, que nous notons  $y_0$ . Nous notons le résultat de la projection  $Y_0$ . Nous obtenons la seconde équation

$$y_0 = \operatorname{argsh}\left(\frac{\sinh y}{\cosh x}\right) \quad (4)$$

Nous pouvons maintenant déterminer, grâce à l'équation (1), la longueur euclidienne dans le modèle de Klein du segment entre l'origine et  $X_0$  ou  $Y_0$ , ce qui nous donnera par la même occasion les coordonnées cartésiennes du modèle de Klein du point  $P$ . Cependant, nous voulons pouvoir obtenir une valeur positive ou négative, selon le cas. Nous ôterons donc la valeur absolue de l'équation (1).

Nous ferons le développement complet pour  $X_0$ , sachant qu'il suffit d'échanger  $x$  et  $y$  pour obtenir le développement de  $Y_0$ . Nous appelons l'origine du plan  $O$  et les points à l'infini de l'axe  $A$  et  $B$ . Afin d'obtenir le bon signe, nous garderons la convention que  $A$  est du côté positif de l'axe, et  $B$ , du côté négatif. Le raisonnement inverse serait tout aussi bon, mais il faudrait alors ajuster avec un signe «-».

$$x_0 = \frac{1}{2} \ln(OX_0 | AB)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{OA}{OX_0A}}{\frac{OB}{OX_0B}}$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{OA \times X_0B}{OB \times X_0A}$$

8. Une preuve de cette relation peut être trouvée dans Greenberg, Marvin Jay. *Euclidean and Non-euclidean Geometries*, New York, W. H. Freeman, 2008, p. 500-501.

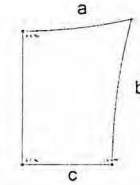


FIGURE 10 – Un quadrilatère de Lambert.

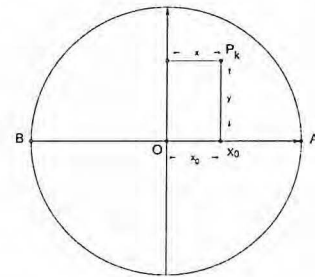


FIGURE 11 – Nous utilisons la même relation pour les coordonnées des points.



Puisque nous avons choisi un rayon de 1 pour le disque de notre modèle,  $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ . Rappelons aussi qu'alors que  $x_0$  représente la distance hyperbolique entre l'origine et  $X_0$ , la distance euclidienne correspond à l'abscisse du point, soit  $x_k$ , comme nous l'avons défini au début de la section. Le birapport s'établissant entre les distances euclidiennes, nous utilisons cette dernière mesure. Donc  $\overline{X_0A} = \overline{OA} - \overline{X_0O} = 1 - x_k$  et  $\overline{X_0B} = \overline{OB} + \overline{X_0O} = 1 + x_k$ . Ce qui nous donne

$$x_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x_k}{1 - x_k}$$

Puisque le point  $X_0$  est compris dans le disque de rayon 1, sa distance à l'origine sera nécessairement inférieure à 1. Donc, la fraction à l'intérieur du logarithme ne sera jamais négative, car aucun des termes ne peut être négatif. Il n'y a ainsi aucune restriction quant aux valeurs de  $x_k$ . Isolons maintenant la variable  $x_k$ .

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x_k}{1-x_k} \\ 2x_0 &= \ln \frac{1+x_k}{1-x_k} \\ e^{2x_0} &= \frac{1+x_k}{1-x_k} \\ e^{2x_0} - x_k e^{2x_0} &= 1 + x_k \\ e^{2x_0} - 1 &= x_k (e^{2x_0} + 1) \\ x_k &= \frac{e^{2x_0} - 1}{e^{2x_0} + 1} \end{aligned}$$

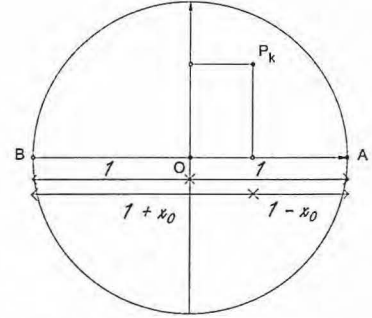


FIGURE 12 – Nous connaissons facilement les longueurs dont nous avons besoin.

Nous remplaçons finalement la valeur de  $x_0$  par celle trouvée dans l'équation (1).

$$x_k = \frac{e^{2 \operatorname{argsh} \frac{\sinh x}{\cosh y}} - 1}{e^{2 \operatorname{argsh} \frac{\sinh x}{\cosh y}} + 1} \quad (5)$$

Nous trouvons l'équation pour les ordonnées en remplaçant  $x$  par  $y$  et vice versa.

$$y_k = \frac{e^{2 \operatorname{argsh} \frac{\sinh y}{\cosh x}} - 1}{e^{2 \operatorname{argsh} \frac{\sinh y}{\cosh x}} + 1} \quad (6)$$

La valeur de nos réponses découle entièrement des équations (1) et (3). Il nous faut cependant nous assurer que le signe de cette valeur est le bon. Rappelons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sinh(-t) &= -\sinh(t) \\ \operatorname{argsh}(-t) &= -\operatorname{argsh}(t) \\ \cosh(-t) &= \cosh(t) \end{aligned}$$

Donc, la fraction  $\frac{\sinh x}{\cosh y}$  respectera le signe de  $x$ , celui de  $y$  étant annulé par le cosinus hyperbolique. Ce signe sera transmis par la fonction de l'argument du sinus hyperbolique, puis par la multiplication par 2. Par la suite, l'exponentielle au numérateur comme au dénominateur prendront une valeur supérieure à 1 si l'argument a un signe positif, et entre 0 et 1 si l'argument a un signe négatif, avec évidemment la valeur de 1 lorsque l'argument vaut 0. Or, cela fait que le dénominateur sera toujours positif, car on ajoute 1 à une fonction dont l'image réelle est strictement positive. Par contre, le numérateur aura le même signe que l'argument de l'exponentielle, car si celle-ci est inférieure à 1, elle renverra une valeur négative lorsqu'on lui soustraira 1. Il en va évidemment de même pour les valeurs d'ordonnées.

Ces deux dernières équations nous permettent donc de déterminer les coordonnées  $(x_k, y_k)$  d'un point  $P$  de coordonnées réelles  $(x, y)$  représenté dans le disque de Klein, et par le fait même de traduire n'importe quelle courbe connue sous forme paramétrique dans un plan hyperbolique vers le modèle de Klein.

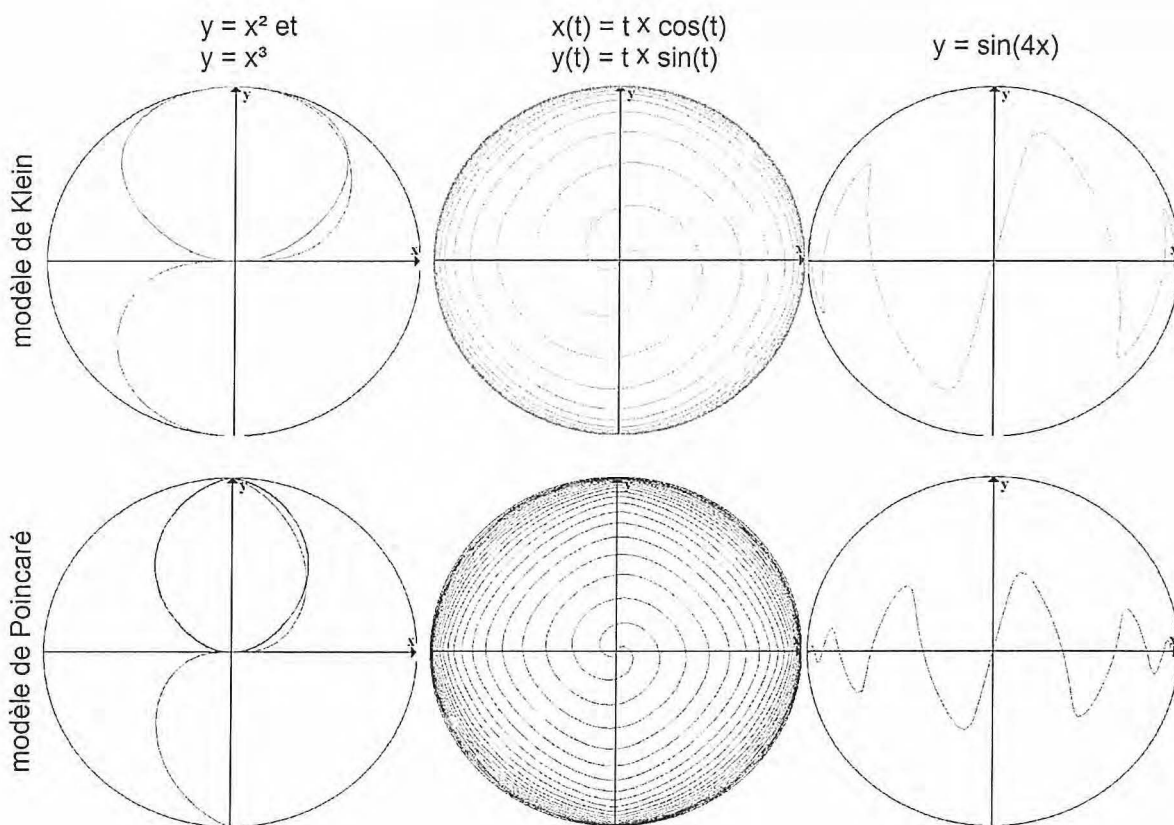


FIGURE 13 – Les mêmes fonctions qu'à la section précédente, avec leurs équations respectives.

### 3.3 Traduction de la représentation du disque de Klein vers le disque de Poincaré

Nous voulons maintenant traduire les coordonnées du point  $P$  que nous connaissons dans le modèle de Klein vers le disque de Poincaré.

Pour ce faire, nous allons considérer la distance à l'origine de ce point et la droite  $OP_k$ . En effet, puisque l'origine et les droites passant par ce point sont inchangés lors du passage du disque de Klein vers le disque de Poincaré, nous savons que le point que nous cherchons sera sur la même droite  $OP_k$ . Il ne nous reste plus qu'à déterminer la distance euclidienne que ce point doit avoir de l'origine.

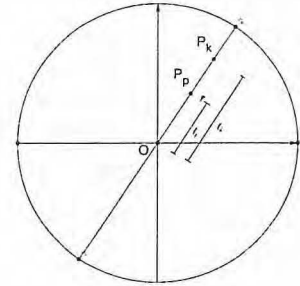


FIGURE 14 – Un point se rapproche de l'origine sur son diamètre lorsqu'il passe du disque de Klein à celui de Poincaré.

Examinons les équations (1) et (2) ensemble. Le terme de gauche représente la distance hyperbolique du point  $P$  à l'origine. Pour trouver la traduction des coordonnées du modèle de Klein à celui de Poincaré, nous devons trouver la valeur de la distance euclidienne du point  $P_p$  dans le modèle de Poincaré en fonction de la distance euclidienne du modèle de Klein pour que la distance hyperbolique soit la même. Nous utiliserons comme notation  $l_p$  et  $l_k$  pour désigner respectivement la distance euclidienne entre le point  $P$  et l'origine dans les modèles de Poincaré et de Klein.

$$\begin{aligned} d_k(OP_k) &= d_p(OP_p) \\ \frac{1}{2} |\ln(OP_k | AB)| &= |\ln(OP_p | AB)| \end{aligned}$$

$A$  et  $B$  représentant toujours les points à l'infini de la droite sur laquelle nous faisons le birapport, soit la droite  $OP_i$ . Afin de pouvoir ôter la valeur absolue, nous choisissons  $A$  comme étant le point du même côté de l'origine que le point  $P$ , dans les deux modèles, et  $B$ , le point opposé.

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\overline{OA} \times \overline{P_k B}}{\overline{OB} \times \overline{P_k A}} = \ln \frac{\overline{OA} \times \overline{P_p B}}{\overline{OB} \times \overline{P_p A}}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, puisque la droite  $OP$  passe par l'origine, nous savons que

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OB} = 1 \\ \overline{P_i A} &= 1 - l_i \\ \overline{P_i B} &= 1 + l_i \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ln \frac{1+l_k}{1-l_k} &= \ln \frac{1+l_p}{1-l_p} \\
\ln \sqrt{\frac{1+l_k}{1-l_k}} &= \ln \frac{1+l_p}{1-l_p} \\
\frac{\sqrt{1+l_k}}{\sqrt{1-l_k}} &= \frac{1+l_p}{1-l_p} \\
(1-l_p)\sqrt{1+l_k} &= (1+l_p)\sqrt{1-l_k} \\
\sqrt{1+l_k} - l_p\sqrt{1+l_k} &= \sqrt{1-l_k} + l_p\sqrt{1-l_k} \\
\sqrt{1+l_k} - \sqrt{1-l_k} &= l_p(\sqrt{1+l_k} + \sqrt{1-l_k}) \\
l_p &= \frac{\sqrt{1+l_k} - \sqrt{1-l_k}}{\sqrt{1+l_k} + \sqrt{1-l_k}} \\
l_p &= \frac{\sqrt{1+l_k} - \sqrt{1-l_k}}{\sqrt{1+l_k} + \sqrt{1-l_k}} \times \frac{\sqrt{1+l_k} - \sqrt{1-l_k}}{\sqrt{1+l_k} - \sqrt{1-l_k}} \\
l_p &= \frac{(1+l_k) + (1-l_k) - 2\sqrt{(1+l_k)(1-l_k)}}{(1+l_k) - (1-l_k)} \\
l_p &= \frac{2 - 2\sqrt{1-l_k^2}}{2l_k}
\end{aligned}$$

Pour finir :

$$l_p = \frac{1 - \sqrt{1-l_k^2}}{l_k} \quad (7)$$

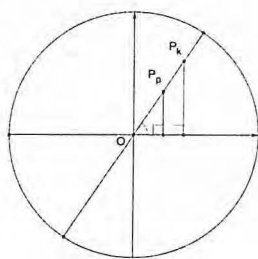


FIGURE 15 - On peut établir un rapport simple entre les distances à l'origine et les coordonnées.

Nous connaissons maintenant le rapport entre la distance euclidienne de l'origine du point  $P_k$  et  $P_p$ . Puisque le segment  $OP_i$  apparaît comme une ligne droite dans les deux modèles, il peut être vu comme l'hypoténuse d'un triangle dont les cathètes sont les coordonnées euclidiennes. Les triangles étant semblables, car la droite  $OP_i$  ne se transforme pas d'un modèle à l'autre, et donc forme toujours le même angle avec les axes, nous pouvons affirmer que ce rapport est maintenu entre les cathètes. Nous pouvons donc établir les rapports suivants

$$\frac{y_p}{y_k} = \frac{x_p}{x_k} = \frac{l_p}{l_k}$$

que nous développons pour isoler  $x_p$  et  $y_p$  :

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{l_p}{l_k} \times x_k \\ &= \frac{x_k(1-\sqrt{1-l_k^2})}{l_k^2} \\ &= \frac{x_k(1-\sqrt{1-x_k^2-y_k^2})}{x_k^2+y_k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{l_p}{l_k} \times y_k \\ &= \frac{y_k(1-\sqrt{1-l_k^2})}{l_k^2} \\ &= \frac{y_k(1-\sqrt{1-x_k^2-y_k^2})}{x_k^2+y_k^2} \end{aligned}$$

Nous retenons les équations

$$x_p = \frac{x_k(1 - \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2})}{x_k^2 + y_k^2} \quad (8)$$

$$y_p = \frac{y_k(1 - \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2})}{x_k^2 + y_k^2} \quad (9)$$

Nous avons dorénavant nos équations pour transformer une fonction de l'espace hyperbolique au modèle de Klein, puis au modèle de Poincaré. Nous pouvons donc traiter nos courbes dans le modèle de que nous voulons, et changer d'un modèle à l'autre, ce qui sera très utile dans la suite de notre démarche.

## 4 Suite de la démarche : D'une courbe à un polygone

Pour la suite de ce travail, nous devons considérer la région dont nous voulons trouver l'aire comme un polygone. La courbe sera donc étudiée comme une ligne brisée, formée d'un nombre infiniment grand de côtés infinitésimaux. À partir de cette vision de notre courbe, nous devons trouver la valeur de chaque angle de notre polygone afin de déterminer ultimement son déficit, qui nous donnera l'aire de celui-ci.

### 4.1 Relier deux points dans l'espace

Pour déterminer la valeur d'un angle, il est beaucoup plus commode d'utiliser le modèle de Poincaré, puisque celui-ci est conforme. Et pour connaître l'angle du modèle, il suffit de déterminer la pente des droites tangentes aux arcs de cercles représentant les droites hyperboliques. Cependant, pour déterminer l'équation euclidienne de la représentation d'une droite hyperbolique, le modèle de Klein est alors de loin plus facile à utiliser. Nous allons donc déterminer

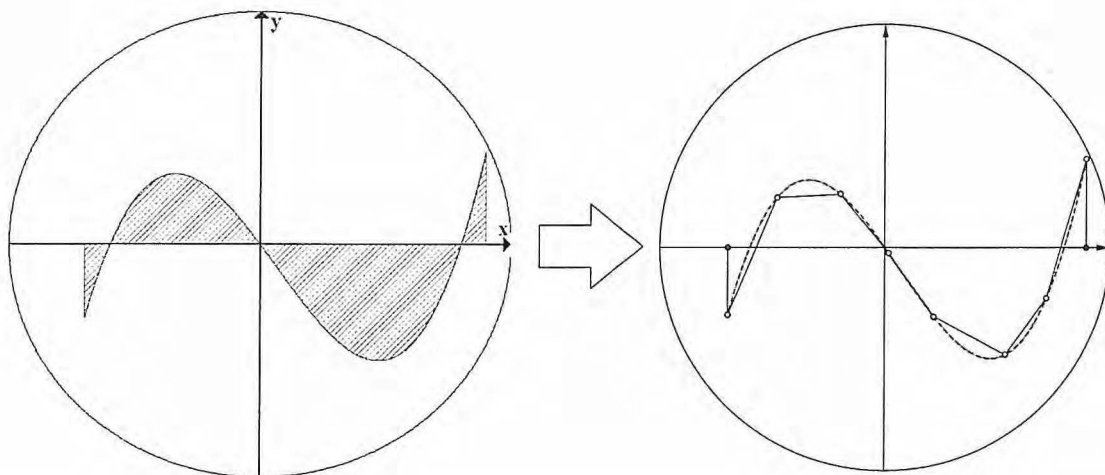


FIGURE 16 – On considère la courbe comme une ligne brisée et on cherche l'aire du polygone.

la droite du modèle de Poincaré à partir de celle du modèle de Klein. Cependant, comme ce qui nous intéresse réellement est la pente de la droite euclidienne tangente à l'arc euclidien, nous n'avons pas à déterminer l'équation de l'arc lui-même ; il suffit de trouver son centre.

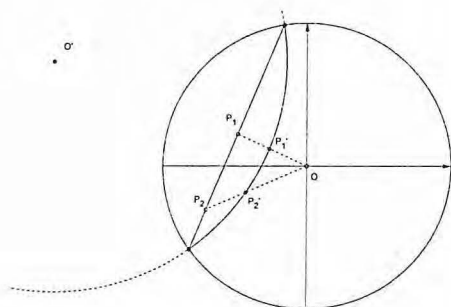


FIGURE 17 – Nous devons relier les points  $P_1$  et  $P_2$ .

Commençons par poser nos variables. Nous voulons trouver la droite partant du point  $P_1$  de coordonnées euclidiennes  $(x_1, y_1)$  dans le modèle de Klein, et allant vers le point  $P_2$ , dont les coordonnées euclidiennes dans le modèle de Klein sont  $(x_2, y_2)$ . Les points équivalents dans le disque de Poincaré seront notés  $P'_1$  et  $P'_2$ . Nous cherchons ultimement la pente de la droite euclidienne tangente au point  $P_1$ , et non  $P_2$ . Entre temps, nous aurons besoin du centre de l'arc euclidien du modèle de Poincaré. Nous le noterons  $O'$ .

Décrivons notre droite par ses équations paramétriques.

$$\begin{aligned} x &= x_1 + k(x_1 - x_2) \\ y &= y_1 + k(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

où  $k$  est réel.

Puisque le cercle de centre  $O'$  intersecte le cercle de centre  $O$  aux mêmes points que la droite  $P_1P_2$ , les deux points d'intersection – appelons-les  $I$  et  $J$  – sont à égale distance autant du

centre  $O$  que du centre  $O'$ . Nous pouvons donc dire que le quadrilatère  $OIO'J$  est un rhomboïde. Par conséquent, ses diagonales, soit les droites  $OO'$  et  $P_1P_2$ , sont perpendiculaires. Comme nous connaissons la pente de la droite  $P_1P_2$ , nous pouvons donc maintenant connaître la pente de la droite  $OO'$ , qui est l'opposée de l'inverse de la pente précédente. Cette droite passant par l'origine, nous pouvons déterminer complètement l'équation de la droite  $OO'$  :

$$\begin{aligned}x &= t(y_1 - y_2) \\ y &= -t(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

où  $t$  est réel.

Il ne nous manque que les coordonnées du point  $O'$ . Appelons  $M$  le point d'intersection des deux diagonales. Il est possible de déterminer une relation entre la distance  $\overline{OM}$  et  $\overline{OO'}$ .

Soit les triangles  $OIO'$  et  $OMI$ . Puisque  $IJ$  et  $OO'$  sont perpendiculaires,  $\angle OMI$  est droit. Il en est de même pour  $\angle OIO'$ , puisque l'arc  $IJ$  est orthogonale au cercle de centre  $O$ . Donc, les tangentes sont perpendiculaires entre elles, et les rayons des cercles de centre  $O$  et  $O'$  de même. Finalement, les deux triangles partagent le même  $\angle MOI$ . Ces deux triangles sont donc semblables et nous pouvons donc établir l'équation

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{OI}}$$

Or, nous savons que  $\overline{OI} = 1$ . Nous avons donc la relation

$$\frac{1}{\overline{OM}} = \overline{OO'} \quad (10)$$

Nous pouvons trouver les coordonnées du point  $M$  grâce aux équations paramétriques des deux diagonales du rhomboïde.

$$\begin{aligned}x &= x_1 + k(x_1 - x_2) = t(y_1 - y_2) \Rightarrow t = \frac{x_1 + k(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2} \\ y &= y_1 + k(y_1 - y_2) = -t(x_1 - x_2) \Rightarrow t = -\frac{y_1 + k(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}\end{aligned}$$

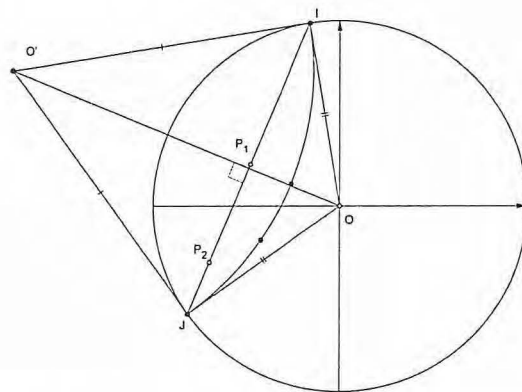


FIGURE 18 – Les points  $OIO'J$  forment un rhomboïde, ou cerf-volant.

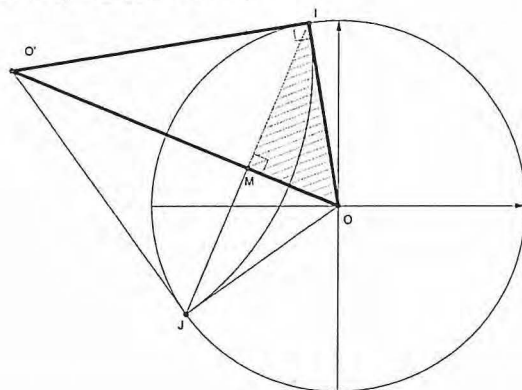


FIGURE 19 – Les triangles  $OIO'$  et  $OMI$  sont semblables.

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+k(x_1-x_2)}{y_1-y_2} &= -\frac{y_1+k(y_1-y_2)}{x_1-x_2} \\
\frac{x_1}{y_1-y_2} + \frac{k(x_1-x_2)}{y_1-y_2} &= -\frac{y_1}{x_1-x_2} - \frac{k(y_1-y_2)}{x_1-x_2} \\
k\left(\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} + \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right) &= -\frac{x_1}{y_1-y_2} - \frac{y_1}{x_1-x_2} \\
k\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} &= -\frac{x_1(x_1-x_2)+y_1(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} \\
k &= -\frac{x_1(x_1-x_2)+y_1(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}
\end{aligned}$$

En  $x$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
x_M &= x_1 + k(x_1 - x_2) \\
&= x_1 - \frac{x_1(x_1-x_2)+y_1(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}(x_1 - x_2) \\
&= \frac{x_1((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} - \frac{(x_1(x_1-x_2)+y_1(y_1-y_2))(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \frac{x_1(x_1-x_2)^2+x_1(y_1-y_2)^2-x_1(x_1-x_2)^2-y_1(y_1-y_2)(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \frac{(y_1-y_2)(x_1(y_1-y_2)-y_1(x_1-x_2))}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= (y_1 - y_2) \frac{x_1(y_1-y_2)-y_1(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}
\end{aligned}$$

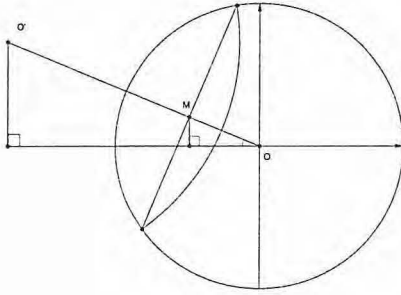
En  $y$ , cela donne

$$\begin{aligned}
y_M &= y_1 + k(y_1 - y_2) \\
&= y_1 - \frac{x_1(x_1-x_2)+y_1(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}(y_1 - y_2) \\
&= \frac{y_1((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} - \frac{(x_1(x_1-x_2)+y_1(y_1-y_2))(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \frac{y_1(x_1-x_2)^2+y_1(y_1-y_2)^2-x_1(x_1-x_2)(y_1-y_2)-y_1(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \frac{-(x_1-x_2)(x_1(y_1-y_2)-y_1(x_1-x_2))}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= -(x_1 - x_2) \frac{x_1(y_1-y_2)-y_1(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}
\end{aligned}$$



Encore une fois, nous pouvons établir un rapport de proportions entre la distance de l'origine à  $M$  et de l'origine à  $O'$  d'une part et leurs coordonnées respectives d'autre part :  $\frac{\overline{OM}}{\overline{OO'}} = \frac{x_M}{x_{O'}} = \frac{y_M}{y_{O'}}$ . Or, nous connaissons ce rapport, donné par l'équation (10). Il est de  $(\overline{OM})^2$ . Nous pouvons donc trouver les coordonnées de  $O'$ .

D'une part,



$$\begin{aligned}(\overline{OM})^2 &= \frac{x_M}{x_{O'}} \\ x_{O'} &= \frac{x_M}{(\overline{OM})^2} \\ x_{O'} &= \frac{x_M}{x_M^2 + y_M^2}\end{aligned}$$

D'autre part,

FIGURE 20 – Les coordonnées de  $O'$  et  $M$  sont reliées par des proportions simples.

$$\begin{aligned}(\overline{OM})^2 &= \frac{y_M}{y_{O'}} \\ y_{O'} &= \frac{y_M}{(\overline{OM})^2} \\ y_{O'} &= \frac{y_M}{x_M^2 + y_M^2}\end{aligned}$$

Afin de garder une certaine lisibilité, développons tout d'abord le dénominateur, qui est le même dans les deux cas.

$$\begin{aligned}x_M^2 + y_M^2 &= \left( (y_1 - y_2) \frac{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)^2 + \left( -(x_1 - x_2) \frac{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)^2 \\ &= \left( (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \right) \left( \frac{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)^2 \\ &= \frac{(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\end{aligned}$$

Reprenons les équations précédentes :

$$x_{O'} = (y_1 - y_2) \frac{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \times \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))^2}$$

$$x_{O'} = \frac{y_1 - y_2}{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}$$

$$y_{O'} = -(x_1 - x_2) \frac{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \times \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))^2}$$

$$y_{O'} = -\frac{x_1 - x_2}{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}$$

Maintenant que nous connaissons les coordonnées du point  $O'$ , nous pouvons déterminer la pente de la droite euclidienne reliant  $O'$  à  $P'_1$ , puis déterminer la pente de la tangente euclidienne à la droite hyperbolique reliant  $P'_1$  à  $P'_2$ , car la tangente d'un cercle est perpendiculaire à son rayon. Nous désignerons la pente de la tangente par  $p$ , et celle du rayon par  $p_\perp$ . Nous nous servirons des équations (8) et (9) afin de déterminer les coordonnées de  $P'_1$ .

$$\begin{aligned}
p_\perp &= \frac{y_{O'} - y_1}{x_{O'} - x_1} \\
p &= -\frac{x_{O'} - x_1}{y_{O'} - y_1} \\
p &= -\frac{\frac{y_1 - y_2}{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)} - \frac{x_1(1 - \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2})}{x_1^2 + y_1^2}}{\frac{x_1 - x_2}{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)} - \frac{y_1(1 - \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2})}{x_1^2 + y_1^2}} \\
p &= -\frac{(y_1 - y_2)(x_1^2 + y_1^2) - x_1(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))(1 - \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2})}{-(x_1 - x_2)(x_1^2 + y_1^2) - y_1(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))(1 - \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2})} \\
p &= -\frac{(y_1 - y_2)(x_1^2 + y_1^2)(1 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) - x_1(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))(x_1^2 + y_1^2)}{-(x_1 - x_2)(x_1^2 + y_1^2)(1 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) - y_1(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))(x_1^2 + y_1^2)} \\
p &= -\frac{(y_1 - y_2)(1 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) - x_1(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))}{-(x_1 - x_2)(1 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) - y_1(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2))} \\
p &= \frac{(y_1 - y_2)(1 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) - x_1^2(y_1 - y_2) + x_1 y_1(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(1 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) + y_1 x_1(y_1 - y_2) - y_1^2(x_1 - x_2)}
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'équation

$$p = \frac{(y_1 - y_2)(1 - x_1^2 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) + x_1 y_1(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(1 - y_1^2 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) + x_1 y_1(y_1 - y_2)} \quad (11)$$

## 4.2 Déterminer l'angle à un sommet

Nous devons déterminer la valeur de la pente de deux droites pour chaque sommet : celle allant du point précédent vers le point étudié, et celle allant du point étudié vers le point suivant.

Pour connaître l'angle entre les deux droites, nous utiliserons la fonction arctangente, qui renvoie l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses lorsque l'on entre la pente de la droite comme argument. Il suffit donc de soustraire les deux angles donnés pour obtenir l'angle entre les deux. Cependant, il faut faire attention à l'intervalle que nous voulons avoir. En effet, l'angle que nous voulons obtenir doit être l'angle à l'intérieur du polygone, et non celui à l'extérieur. Il serait aussi aberrant d'obtenir un angle négatif, car nous voulons mesurer des angles géométriques.

Considérons donc un angle quelconque du polygone,  $\angle P_A P_B P_C$ , les trois points ayant une abscisse croissante. Nous calculons deux valeurs de pente :  $p_{AB}$  et  $p_{BC}$ . Il faut ajuster l'angle donné par l'arctangente de la première pente, car nous avons obtenu en fait l'angle formé par le prolongement de la droite et l'axe des abscisses. Il faut soustraire la valeur de  $\pi$ . L'angle

obtenu pour la deuxième pente est juste cependant, car le segment est du bon côté de l'axe des ordonnées. Nous pouvons maintenant soustraire le second angle du premier pour obtenir l'angle intérieur du polygone.

La valeur de l'angle au sommet  $P_B$  est donc

$$\angle P_B = \arctan p_{BC} - (\arctan p_{AB} - \pi) \quad (12)$$

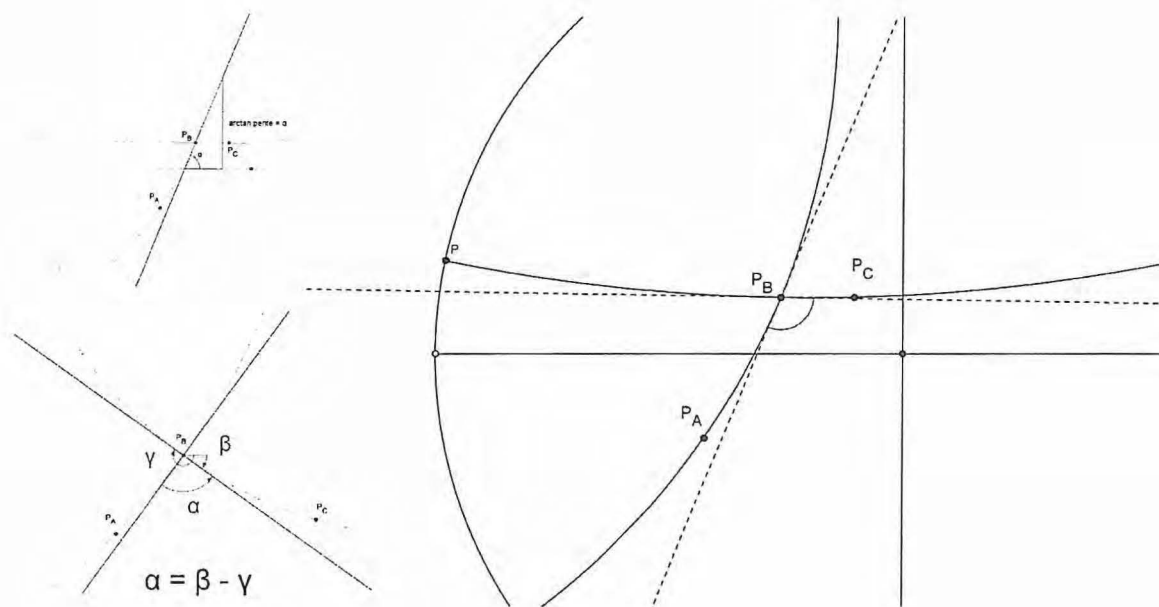


FIGURE 21 – Nous pouvons déterminer l'angle d'un sommet grâce à l'arctangente des pentes.

### 4.3 Boucler la boucle

Il faut finalement tenir compte de deux exceptions à l'équation (12) : les deux cas où il n'y a pas de point précédent ou de suivant, soit les points aux extrémités de notre intervalle de fonction. Il suffit de prendre comme point précédent ou suivant les points où les droites verticales croisent l'axe des abscisses pour fermer le polygone. Ces points ont comme ordonnée la valeur de 0, évidemment, et comme abscisse, la même valeur que l'extrémité de la courbe, dans la représentation de Klein. C'est encore une fois dû au fait que dans cette représentation, les quadrilatères de Lambert qui permettent de dicter les coordonnées sont des rectangles.

Nous pouvons calculer tout de suite la pente de la tangente. Soit l'une des extrémité de l'intervalle de la fonction dont nous voulons connaître l'aire sous la courbe ayant comme coordonnées  $E_k(x_k, y_k)$  dans la représentation de Klein. La projection de  $E_k$  sur l'axe des abscisses aura comme coordonnées  $E'_k(x_k, 0)$ . Nous utilisons maintenant l'équation (11), ce qui nous

donne

$$\begin{aligned}
p &= \frac{(y_1 - y_2)(1 - x_1^2 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) + x_1 y_1 (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(1 - y_1^2 + \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}) + x_1 y_1 (y_1 - y_2)} \\
p &= \frac{(y_k - 0)(1 - x_k^2 + \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2}) + x_k y_k (x_k - x_k)}{(x_k - x_k)(1 - y_k^2 + \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2}) + x_k y_k (y_k - 0)} \\
p &= \frac{y_k(1 - x_k^2 + \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2}) + 0}{0 + x_k y_k^2} \\
p &= \frac{1 - x_k^2 + \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2}}{x_k y_k} \tag{13}
\end{aligned}$$

Nous ne pouvons cependant utiliser cette pente comme précédemment. Il faut faire attention, car contrairement aux sommets de la fonction, il se peut que la pente tende vers l'infini, si le point est situé sur l'un des deux axes, ou même qu'elle nécessite l'ajout ou la soustraction de  $\pi$  lorsque l'on utilise la fonction arctangente. Il en est ainsi parce que si l'on considère que les côtés sont orientés, c'est-à-dire qu'ils sont comme des vecteurs à la chaîne l'un de l'autre, les vecteurs des droites verticales, contrairement aux autres, peuvent avoir une orientation qui n'est pas comprise à l'intérieur de l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Si la pente tend vers l'infini, alors nous pouvons considérer son angle comme  $\frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$ . D'autre part, si le point  $E_k$  est sur l'axe des abscisses, nous pouvons considérer qu'il y a une ligne infinitésimale qui relie  $E_k$  à  $E'_k$ , de sorte que l'angle provenant de  $E'_k$  est  $\frac{\pi}{2}$ . Pour ces ajustements, il est nécessaire de discriminer différentes possibilités au moment de calculer l'aire sous la courbe.

## 5 Aboutissement de la démarche : Calculer l'aire sous la courbe

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour déterminer l'aire de notre polygone. Nous savons déterminer l'angle formé par un sommet quelconque de même qu'aux extrémités, et nous savons que l'aire d'un polygone peut être calculée à partir de ses angles seulement.

Nous voulons déterminer l'aire sous la courbe d'une fonction quelconque  $f(x)$  pour un intervalle  $[a, b]$ . Les sommets du polygone seront répartis sur la courbe comme suit : nous découperons l'intervalle  $b - a$  de la courbe en un nombre  $n$  de segments. Chaque sommet sera donc à la position  $a + i \times \frac{b-a}{n}$ , avec  $i$  variant de 1 à  $n - 1$ , car nous excluons les extrémités.

Nous calculons la somme des angles à chaque sommet, puis nous y additionnons les angles des deux sommets aux extrémités de la courbe, et deux fois  $\frac{\pi}{2}$ , qui correspondent aux angles entre les droites verticales et l'axe des abscisses. Nous soustrayons cette somme à la valeur maximale des angles d'un polygone ayant le même nombre de côtés pour déterminer l'aire, comme expliquer à la section 2.4. Ici, notre polygone aura exactement  $n + 3$  côtés, soit les  $n$  côtés qui forment l'approximation de la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales. Donc, l'aire maximale de ce polygone, selon la section 2.4, est de  $\pi \times (n + 1)$ . En y soustrayant la

somme des angles que nous avons trouvé, nous pouvons donc finalement connaître l'aire sous la courbe.

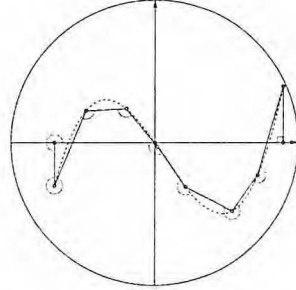


FIGURE 22 – Nous pouvons maintenant calculer l'aire du polygone donné par la fonction.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi + \pi(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{angle du sommet } i) - \pi - \text{somme des angles aux extrémités}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi + \sum_{i=1}^{n-1} (\pi - \text{angle du sommet } i) - \text{somme des angles aux extrémités}) \end{aligned}$$

Nous savons comment trouver chacun des angles avec les formules (5), (6), (11), (12) et (13). Cependant, afin de simplifier l'écriture, il vaut mieux prendre les formules (5) et (6) et en faire des fonctions. Ainsi, nous n'aurons pas à remplacer les nombreuses occurrences des termes  $x_k$  et  $y_k$  par les fractions des équations (5) et (6). Nous pouvons donc définir deux nouvelles fonctions,  $k_x(t)$  et  $k_y(t)$ , qui représenteront les abscisses et les ordonnées d'une fonction quelconque  $f(t)$  dans le disque de Klein.

$$k_x(t) = \frac{e^{2\operatorname{argsh} \frac{\sinh t}{\cosh f(t)}} - 1}{e^{2\operatorname{argsh} \frac{\sinh t}{\cosh f(t)}} + 1} \quad (14)$$

$$k_y(t) = \frac{e^{2\operatorname{argsh} \frac{\sinh f(t)}{\cosh t}} - 1}{e^{2\operatorname{argsh} \frac{\sinh f(t)}{\cosh t}} + 1} \quad (15)$$

Nous faisons de même pour la pente de la tangente. Celle-ci prend deux valeurs comme argument : le point où passe la tangente et l'autre point où passe la droite hyperbolique.

$$p(t_1, t_2) = \frac{(k_y(t_1) - k_y(t_2))(1 - (k_x(t_1))^2 + \sqrt{1 - (k_x(t_1))^2 - (k_y(t_1))^2}) + k_x(t_1)k_y(t_1)(k_x(t_1) - k_x(t_2)))}{(k_x(t_1) - k_x(t_2))(1 - (k_y(t_1))^2 + \sqrt{1 - (k_x(t_1))^2 - (k_y(t_1))^2}) + k_x(t_1)k_y(t_1)(k_y(t_1) - k_y(t_2)))} \quad (16)$$

Donc, pour une fonction  $f(t)$  définie dans un plan hyperbolique, l'aire sous l'intervalle  $[a, b]$  de cette fonction vaut

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \left( \pi - \left( \arctan\left(p\left(a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}\right)\right) - \left( \arctan\left(p\left(a + i \frac{b-a}{n}, a + (i-1) \frac{b-a}{n}\right)\right) - \pi \right) \right) \right. \\ \left. + \pi - \left( \arctan\left(p\left(a, a + \frac{b-a}{n}\right)\right) - \left( \arctan\left(\frac{1 - (k_x(a))^2 + \sqrt{1 - (k_x(a))^2 - (k_y(a))^2}}{k_x(a)k_y(a)}\right) - \pi \right) \right) \right. \\ \left. - \left( \arctan\left(\frac{1 - (k_x(b))^2 + \sqrt{1 - (k_x(b))^2 - (k_y(b))^2}}{k_x(b)k_y(b)}\right) - \left( \arctan\left(p\left(b, b - \frac{b-a}{n}\right)\right) - \pi \right) \right) \right) \end{aligned}$$

On peut simplifier quelques occurrences de  $\pi$ , ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \left( -\arctan\left(p\left(a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}\right)\right) + \arctan\left(p\left(a + i \frac{b-a}{n}, a + (i-1) \frac{b-a}{n}\right)\right) \right) \\ - \pi - \arctan\left(p\left(a, a + \frac{b-a}{n}\right)\right) + \arctan\left(\frac{1 - (k_x(a))^2 + \sqrt{1 - (k_x(a))^2 - (k_y(a))^2}}{k_x(a)k_y(a)}\right) \\ - \arctan\left(\frac{1 - (k_x(b))^2 + \sqrt{1 - (k_x(b))^2 - (k_y(b))^2}}{k_x(b)k_y(b)}\right) + \arctan\left(p\left(b, b - \frac{b-a}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

N'oublions pas que nous devons possiblement ajuster cette équation en additionnant ou soustrayant  $\pi$ , selon la configuration des droites verticales. Sinon, cette équation est celle que nous cherchions. Grâce à elle, nous pouvons maintenant déterminer l'aire sous une fonction, pour n'importe quel intervalle donné.

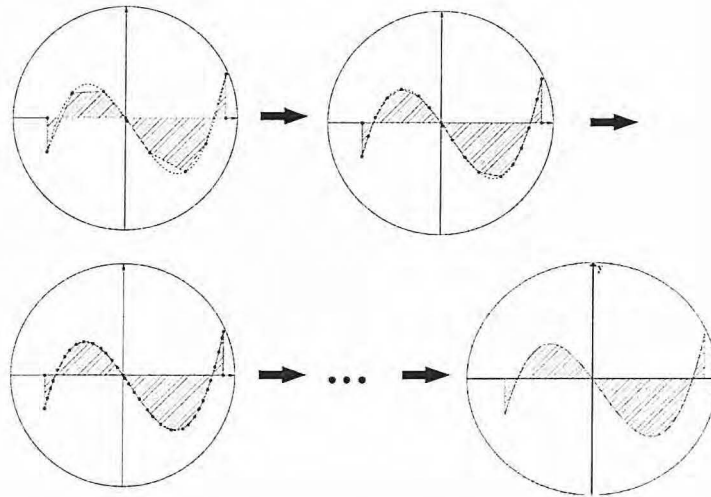


FIGURE 23 – L'aire du polygone avec un nombre infini de points tendra vers l'aire sous la courbe.

## 6 Limites de notre résultat

Nous ne pouvons étudier toutes les courbes avec le résultat que nous avons trouvé. Il faut en effet que la courbe en question respecte les conditions suivantes :

1. La fonction représentée dans le disque de Poincaré ne doit pas avoir une tangente qui paraîtrait verticale. En l'occurrence, soit  $M(x_m, y_m)$  et  $N(x_n, y_n)$  deux points quelconques de la fonction, et  $M_x(x_{mp}, 0)$  et  $N_x(x_{np}, 0)$  leur projection respective sur l'axe des abscisses,  $x_m < x_n \Rightarrow x_{mp} < x_{np}$ .
2. La fonction doit être continue, tout comme dans un plan euclidien, sans quoi la région sous la courbe ne pourra pas être correctement définie.

La première condition est présente tout simplement pour éviter que lorsque l'on utilise l'arctangente dans la sommation, celle-ci ne renvoie pas une erreur, comme ce serait le cas avec une tangente verticale. Elle empêche aussi que la fonction ne « revienne » sur elle-même, comme dans les exemples ci-dessous. Ces cas seraient problématiques, car l'arctangente ne donnerait plus le bon angle.

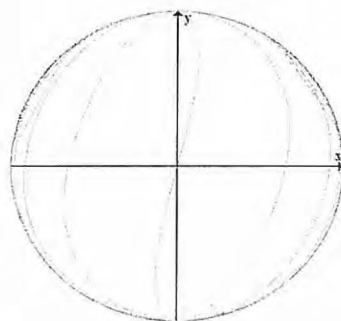


FIGURE 24 – La fonction  $y = \tan x$  ne pourrait être étudiée.

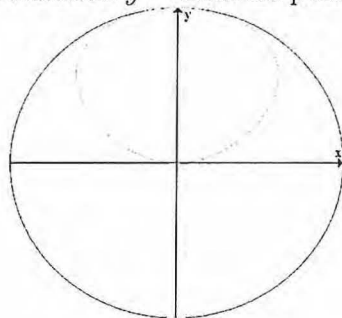


FIGURE 25 – Il en est de même pour la fonction  $y = x^2$ .

En dehors de ces contraintes, notre formule ne peut s'appliquer qu'à des courbes dans un plan hyperbolique en deux dimensions et à courbure constante. Ces limites, que nous sommes posées au départ, ont permis de simplifier beaucoup de facteur afin d'arriver à notre réponse, mais dans la réalité, malheureusement, les surfaces hyperboliques n'ont pas

nécessairement de courbure constante. En fait, rare sont celles qui en ont une, car un plan hyperbolique ne peut être entièrement contenu dans l'espace euclidien.

## 7 Conclusion

Nous avons atteint notre but, soit trouver une formule algébrique pour déterminer l'aire sous un intervalle donné d'une courbe. Avec notre méthode, nous pouvons mesurer l'aire de nombreux objets dans l'espace hyperbolique, en autant que nous connaissions une fonction imitant les contours de cet objet. Cependant, il est vrai que notre formule est assez imposante. Nous aurions aimé en trouver une plus concise, qui aurait possiblement élargi l'ensemble des fonctions que l'on peut étudier. Nous pensons que l'utilisation des produits vectoriel et scalaire auraient pu remplacer l'utilisation de l'arctangente, mais cette méthode a soulevé plus de défis que de solutions pour nous. Nous restons néanmoins convaincu du potentiel des vecteurs pour une amélioration de notre démarche.



## 8 Bibliographie

- Efimov, Nikolai. 1981. *Géométrie supérieure*. Moscou : Mir, 605 p.
- Greenberg, Marvin Jay. 2008. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. New York : W. H. Freeman, 4<sup>e</sup> éd., 637 p.
- Weeks, Jeffrey R. 2002. *The Shape of Space*. New York : Marcel Dekker, 382 p.
- Vivier, Laurent. 2006. *La géométrie analytique*. Paris : Le Pommier, 159 p.

## 9 Annexe

### 9.1 Symboles et notations utilisées

Symbole	Utilisation
$AB$	Droite, arc ou objet contenant les deux points $A$ et $B$
$\overline{AB}$	Mesure du segment euclidien reliant les points $A$ et $B$
$(AB CD)$	Birapport $\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$
$d(AB)$	Distance hyperbolique entre les points $A$ et $B$
$P(x, y)$	Point quelconque dans le plan d'abscisse $x$ et d'ordonnée $y$
$P'$	Point du disque de Poincaré équivalent à un point connu du disque de Klein
$X_0$	Projection du point $P$ sur l'axe des abscisses
$Y_0$	Projection du point $P$ sur l'axe des ordonnées
$O$	Origine du plan
$O'$	Centre du cercle contenant l'arc du modèle de Poincaré
$x_0$	Distance entre $O$ et $X_0$
$y_0$	Distance entre $O$ et $Y_0$
$I, J$	Points à l'infini
«hyperbolique» ou «réel»	Mesure ou objet mathématique dans le plan hyperbolique
«euclidien»	Représentation de la mesure ou de l'objet mathématique dans le plan euclidien
$k$	Relatif au modèle de Klein dans le plan euclidien
$p$	Relatif au modèle de Poincaré dans le plan euclidien
$ x $	Valeur absolue de $x$
$\ln$	logarithme népérien
$\sinh$	sinus hyperbolique
$\cosh$	cosinus hyperbolique
$\operatorname{argsh}$	argument du sinus hyperbolique
$\operatorname{arctan}$	arctangente