



**MÉTODOS MATEMÁTICOS**  
**NIVEL MEDIO**  
**PRUEBA 2**

Lunes 12 de noviembre de 2001 (mañana)

2 horas

---

**INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p.ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

*Se aconseja que empiece una página nueva para cada respuesta. Una respuesta correcta **sin** indicación del método utilizado no recibirá normalmente **ningún** punto. Se recomienda por lo tanto que muestre sus cálculos. Cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

## SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.*

### 1. [Puntuación máxima: 14]

La función  $f$  se define como  $f: x \mapsto -0,5x^2 + 2x + 2,5$ .

(a) (i) Determine  $f'(x)$ .

(ii) Calcule  $f'(0)$ .

[2 puntos]

(b) Demuestre que la ecuación de la recta perpendicular a la tangente a la gráfica de  $f$  (o sea, la normal) en el punto en el que la gráfica corta al eje Oy puede escribirse  $y = -0,5x + 2,5$ .

[2 puntos]

La ecuación de la curva puede escribirse como  $y = f(x)$ . La ecuación de la normal puede escribirse como  $y = g(x)$ .

(c) Iguale  $f(x)$  y  $g(x)$  y resuelva la ecuación cuadrática resultante.

[3 puntos]

(d) Escriba las coordenadas del otro punto de intersección de la normal y la curva.

[2 puntos]

(e) Escriba una expresión del área encerrada entre la curva y la normal en la que aparezca una integral.

[3 puntos]

(f) Calcule la expresión del apartado (e).

[2 puntos]

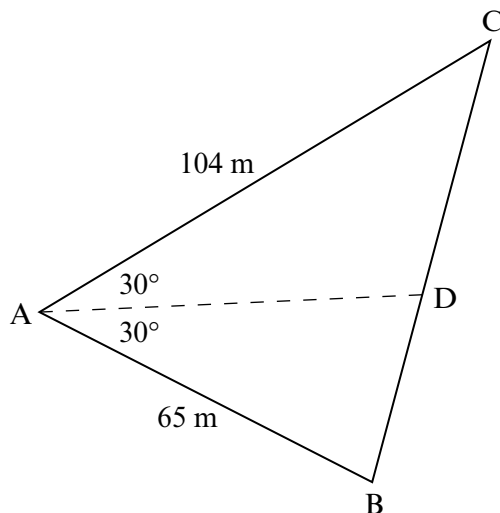
2. [Puntuación máxima: 15]

Un granjero posee un campo triangular  $ABC$ . Un lado del triángulo,  $[AC]$ , tiene 104 m de longitud, un segundo lado,  $[AB]$ , tiene 65 m de longitud y el ángulo formado por estos dos lados es de  $60^\circ$ .

(a) Use la regla del coseno para calcular la longitud del tercer lado del campo. [3 puntos]

(b) Sabiendo que  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , exprese el área del campo en la forma  $p\sqrt{3}$ , siendo  $p$  un entero. [2 puntos]

El granjero divide su campo en dos partes construyendo una valla recta  $[AD]$  de longitud  $x$  m que es la bisectriz del ángulo de  $60^\circ$ , tal como se ve en la figura.



(c) Demuestre que el área menor viene dada por  $\frac{65x}{4}$  y obtenga una expresión similar para el área mayor. [3 puntos]

(d) **Partiendo de aquí**, determine el valor de  $x$  en la forma  $q\sqrt{3}$ , siendo  $q$  un entero. [3 puntos]

(e) (i) ¿Qué puede decirse de  $\widehat{ADC}$  y  $\widehat{ADB}$ ?

(ii) Use el resultado del apartado (i) y la regla del seno para demostrar que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{5}{8}. \quad [4 \text{ puntos}]$$

3. [Puntuación máxima: 12]

La función  $f$  se define como  $f: x \mapsto x^3 e^{-x}$ .

A medida que  $x$  crece, partiendo de 0, la gráfica de  $f$  crece hasta un valor máximo y luego decrece constantemente, aproximándose asintóticamente a un valor límite.

- (a) Dibuje una gráfica aproximada de  $f$  para  $0 \leq x \leq 10$ , eligiendo una escala adecuada para el eje  $Oy$ . (No es necesario que la gráfica sea del todo precisa). En la gráfica deben quedar claras la ordenada en el origen, la posición del máximo y el comportamiento asintótico.

[4 puntos]

- (b) (i) Sombree en su gráfica el área representada por

$$\int_0^5 x^3 e^{-x} dx.$$

- (ii) Calcule esta integral.

[2 puntos]

- (c) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal a la gráfica de  $f$ .

[1 punto]

- (d) Considere la ecuación  $f(x) = 1$ .

- (i) Dibuje una recta en su gráfica que ilustre por qué esta ecuación tiene más de una solución.

- (ii) Escriba las soluciones de  $f(x) = 1$ .

[3 puntos]

- (e) Escriba las coordenadas del punto máximo de la gráfica de  $f$ .

[2 puntos]

4. [Puntuación máxima: 12]

La bolsa A contiene 2 bolas rojas y 3 bolas verdes. La bolsa B contiene 4 bolas rojas y 2 bolas verdes. Una persona toma una de las bolsas y extrae dos bolas. Si elige la bolsa A, las probabilidades de los distintos sucesos son

$$P(2 \text{ bolas rojas}) = \frac{1}{10}$$

$$P(2 \text{ bolas verdes}) = \frac{3}{10}$$

$$P(1 \text{ bola roja y } 1 \text{ bola verde}) = \frac{6}{10}$$

- (a) Calcule las probabilidades de los mismos tres sucesos si se elige la bolsa B. [5 puntos]

Para decidir qué bolsa se elige, se lanza un dado estándar con seis caras. Si sale 1 ó 6 se elige la bolsa A. Si sale 2, 3, 4 ó 5 se elige la bolsa B.

Se lanza el dado y a continuación se extraen dos bolas de la bolsa seleccionada.

- (b) Calcule la probabilidad de que se extraigan dos bolas rojas. [3 puntos]

- (c) Supuesto que se han extraído dos bolas rojas, ¿cuál es la probabilidad condicional de que en el dado haya salido 1 ó 6? [4 puntos]

5. [Puntuación máxima: 17]

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Un trapecio ABCD se define por cuatro rectas que tienen las siguientes ecuaciones

$$\text{Recta 1: (AB) } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Recta 2: (AD) } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Recta 3: (CD) } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Recta 4: (BC) } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Las rectas 1 y 2 se cortan en el punto A(-8, 3), y las rectas 1 y 4 en el punto B(12, 18). Las rectas 3 y 4 se cortan en C, y las rectas 2 y 3 se cortan en D.

- (a) ¿Cuales son las **dos** rectas paralelas? [1 punto]
- (b) Usando los intervalos  $-10 \leq x \leq 15$  y  $0 \leq y \leq 25$ , dibuje una figura clara que ilustre las cuatro rectas y el trapecio que forman. Ponga etiquetas en los vértices. [4 puntos]
- (c) (i) Escriba las coordenadas de C.
- (ii) Demuestre algebraicamente que las coordenadas de D son (-5, 14). [5 puntos]
- (d) El vector  $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  es perpendicular a  $\vec{AB}$ . Use este hecho para hallar la proyección de  $\vec{AD}$  en la dirección  $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ . [4 puntos]
- (e) Calcule el área del trapecio ABCD. [3 puntos]

## SECCIÓN B

Conteste **una** pregunta de esta sección.

### Métodos estadísticos

6. [Puntuación máxima: 30]

- (i) Se averigua la cantidad de alumnos que eligen la clase de física en 3 institutos, A, B y C. La siguiente tabla resume los resultados.

	A	B	C
Eligen física	47	95	58
No eligen física	103	145	152

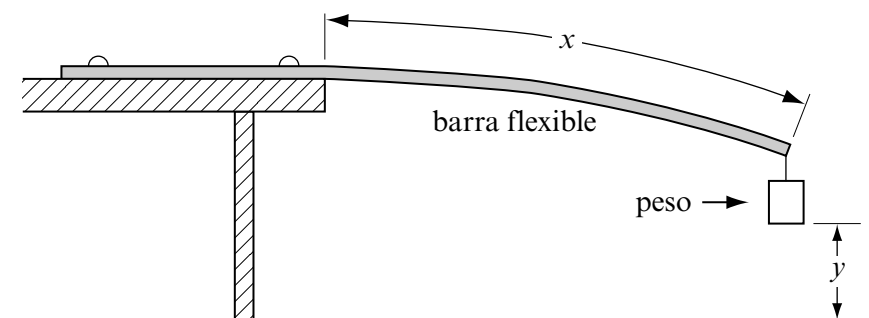
Se ha de examinar, usando una prueba de  $\chi^2$ , la hipótesis de que **la elección de las clases de física es independiente del instituto al que se asiste.**

- (a) Construya una tabla similar a la anterior que muestre las frecuencias esperadas, si la hipótesis es válida. [3 puntos]
- (b) Demuestre cómo se calcula el valor 7,574 de la  $\chi^2$  usando las dos tablas. [3 puntos]
- (c) Comente sobre la validez de la hipótesis usando los niveles de significación tanto del 5% como del 1%. [4 puntos]
- (ii) Una población que se distribuye normalmente tiene una media de 65 y una desviación típica de 12. Se extraen al azar muestras de tamaño 25 de esta población. Se calculan las medias de estas muestras.
- (a) ¿Cuál es el valor esperado de la media muestral? [1 punto]
- (b) Demuestre que el error estándar de la media (es decir, la desviación típica de la población de las medias muestrales) es 2,4. [2 puntos]
- La probabilidad de que la media muestral se halle entre los límites simétricos  $a$  y  $b$  es 0,95.
- (c) Halle los valores de  $a$  y de  $b$ . [4 puntos]
- (d) Sea  $d = a - b$ . Se aumenta el tamaño de la muestra de modo que  $d$  decrezca. Halle el tamaño mínimo de la muestra requerido para que  $d = 5$ . [4 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii)



Se fija a una mesa un extremo de una barra flexible. El otro extremo de la barra se extiende a una distancia de  $x$  metros, a partir del extremo de la mesa. Se fija un peso en el extremo de la barra y se mide la distancia,  $y$  metros, desde la base del peso hasta el suelo.

- (a) Se varía el punto en el que se fija la barra, y se miden  $x$  e  $y$ , con los siguientes resultados.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	1,99	1,91	1,72	1,34	0,77

Se calcula el valor del coeficiente de correlación lineal entre  $x$  e  $y$ , y se obtiene  $r_x = -0,950$ .

¿Qué indica el valor negativo de  $r_x$ ?

[1 punto]

- (b) Con el fin de conseguir una correlación mayor, se calcula el cuadrado de la longitud extendida, que llamaremos  $u$  de modo que  $u = x^2$ . Los valores de  $u$  y de  $y$  son:

$u$	1	4	9	16	25
$y$	1,99	1,91	1,72	1,34	0,77

- (i) Calcule el valor del coeficiente de correlación,  $r_u$ , entre  $u$  e  $y$ .

- (ii) ¿Qué significa el hecho de que el valor de  $r_u$  se encuentre entre  $-0,950$  y  $-1$ ?

[3 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)



(Pregunta 6 (iii): continuación)

- (c) Para ver si se puede hallar una correlación aun mayor, se calcula el cubo de la longitud extendida, que se denota  $v$ . El coeficiente de correlación lineal entre  $v$  e  $y$  es casi exactamente igual a  $-1$ .

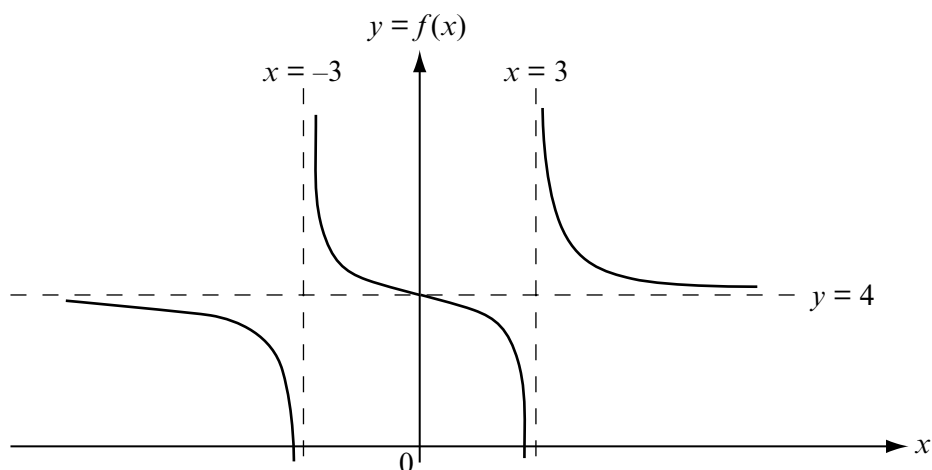
- (i) ¿Qué puede deducirse de este último resultado?
- (ii) Calcule la recta de regresión de mínimos cuadrados que relaciona  $y$  y  $v$  en la forma  $y = av + b$ .
- (iii) ¿Qué valor mínimo de  $x$  se requiere para que el peso toque el suelo?

[5 puntos]

**Extensión de análisis**

**7.** [Puntuación máxima: 30]

- (i) A continuación nos dan la gráfica de una función de la forma  $f: x \mapsto a + \frac{2x}{x^2 - b^2}$ . En la gráfica están señaladas las ecuaciones de las asíntotas.



- (a) Escriba los valores de  $a$  y de  $b$ . [2 puntos]
- (b) Demuestre que  $f'(x) = -\frac{2(x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^2}$ . [3 puntos]
- (c) Use el resultado del apartado (b) para explicar por qué la gráfica de  $f$  no tiene puntos estacionarios (es decir, puntos donde la derivada es cero). [2 puntos]
- (d) La derivada segunda de la función  $f$  es igual a 0 sólo en un punto. Use la gráfica para obtener las coordenadas de este punto. (No halle la expresión de la derivada segunda.) [1 punto]
- (e) Halle una función  $F(x)$  tal que  $F'(x) = f(x)$ . [3 puntos]
- (f) **De aquí**, calcule  $\int_4^{11} f(x) dx$  expresando su respuesta en la forma  $p + q \ln 2$ , siendo  $p, q \in \mathbb{N}$ . [3 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

- (ii) La ecuación  $2x^3 - 9x^2 + 11 = 0$  tiene una solución que está entre  $x = 4$  y  $x = 4,5$ .

- (a) Demuestre que esta ecuación puede escribirse en la forma  $x = g(x)$  siendo

$$g(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{9x^2 - 11}{2}\right)} . \quad [2 \text{ puntos}]$$

- (b) Usando el proceso iterativo  $x_{n+1} = g(x_n)$  con  $x_0 = 4,25$ , escriba los valores de  $x_1$  y  $x_2$  con la precisión que le dé su calculadora. [2 puntos]

- (c) Escriba la solución, aproximando su respuesta con **seis** cifras significativas. [2 puntos]

- (iii) (a) Use el hecho de que  $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ , siendo  $C$  una constante, para demostrar que  $\frac{8}{\ln 3}$  es el valor **exacto** de  $\int_0^2 3^x dx$ . [2 puntos]

- (b) Aproximamos la integral anterior usando la regla del trapecio con dos intervalos (tres ordenadas). ¿Cuál es el valor de esta aproximación? [3 puntos]

- (c) Calcule el error (la diferencia respecto al valor exacto de  $\frac{8}{\ln 3}$ ) al usar la aproximación del apartado (b). Aproxime su respuesta con **dos** cifras significativas. [2 puntos]

- (d) Cuando se usa la regla del trapecio con cuatro intervalos, el error es aproximadamente 0,18. El error se reduce por el mismo factor cada vez que se dobla el número de intervalos. El número de intervalos se restringe al conjunto  $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ . Use esta información para calcular el número mínimo de intervalos requerido para que el error sea menor que 0,001. [3 puntos]

### Extensión de geometría

#### 8. [Puntuación máxima: 30]

- (i) Definimos el cuadrado unidad por el origen,  $O$ , y los vértices  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$  y  $C(0, 1)$ . La transformación representada por la matriz  $M$ , siendo  $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ , transforma  $OABC$  en  $A'B'C'$ .

(a) Escriba las coordenadas de  $A'$  y  $C'$ . [2 puntos]

(b) Determine

(i)  $|\vec{OA'}|$ ;

(ii)  $|\vec{OC'}|$ ;

(iii)  $\vec{OA'} \cdot \vec{OC'}$ . [4 puntos]

(c) Dé una descripción geométrica de la figura transformada  $OA'B'C'$ . [2 puntos]

La transformación representada por la matriz  $M$  puede considerarse como una homotecia seguida de una rotación, teniendo ambas transformaciones  $(0, 0)$  como centro.

(d) Escriba la matriz  $P$  que representa la homotecia. [1 punto]

(e) Usando el hecho de que  $RP = M$ , escriba la matriz  $R$  que representa la rotación. [2 puntos]

(f) Dado que el ángulo de la rotación  $R$  es  $\theta$ , dé el valor de  $\theta$  aproximado al  $0,1^\circ$ . [2 puntos]

(ii) Una matriz desconocida  $2 \times 2$ ,  $X$ , satisface la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Escriba la inversa de la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ . [2 puntos]

(b) Partiendo de aquí, exprese  $X$  como producto de dos matrices. [2 puntos]

(c) Calcule  $X$ . [2 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iii) Una transformación,  $\mathbf{S}$ , viene descrita por

$$\mathbf{S}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Halle la imagen por  $\mathbf{S}$  de

(i)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  ;

(ii)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  .

[4 puntos]

(b) Sabiendo que  $\mathbf{S}$  es una simetría, halle la ecuación del eje de simetría en la forma:  $ax + by + c = 0$  , siendo  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  .

[3 puntos]

(iv) La matriz  $\mathbf{N}$  representa una rotación en sentido antihorario de  $90^\circ$  alrededor de  $(0, 0)$  .

(a) Halle la matriz  $\mathbf{N}$  .

[1 punto]

(b) La transformación  $\mathbf{Q}$  es una rotación en sentido antihorario de  $90^\circ$  alrededor del punto  $(3, 2)$  .  $\mathbf{Q}$  puede escribirse en la forma

$$\mathbf{Q}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{N} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Halle los valores de  $h$  y de  $k$  .

[3 puntos]